Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Astronomie (WS2012/13)

Cornelis Dullemond, Ralf Klessen

Blatt 11

20 Punkte

1. **Protostellare und protoplanetare Scheiben: Abschätzungen**
In Aufgabe 3 von Blatt 8 haben Sie die Entstehung eines Sterns der Masse $M_* = 1\,M_\odot$ durch den Kollaps einer homogenen Molekülwolke mit Radius $R_{\rm wolke} = 0.1\,{\rm pc}$ und Dichte $\rho = 1.67 \times 10^{-20}$ g cm^{-3} betrachtet. Jetzt nehmen wir jedoch eine Rotationsrate von $\Omega = 3 \times 10^{-15}$ s^{-1} an, also etwas langsamer als in der Aufgabe von Blatt 8.

   (a) [3 pt] Lassen Sie uns nun eine *ganz grobe* Abschätzung des Radius der Akkretionsscheibe die sich durch den Kollaps bildet machen. Dazu betrachten wir ein Gaspaket von 1g, das sich vor dem Kollaps am Äquator befindet, und zwar am äußeren Rand der Wolke. Dieses Paket hat also einen Drehimpuls von $l = \Omega R^2_{\rm wolke}$. Wenn die Wolke schließlich ganz kollabiert ist, bleibt eine keplersche Scheibe übrig. Unser Gaspaket wird im Außenrand der Scheibe sein. Berechnen Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung diesen Scheibenradius $R_{\rm scheibe}$. Als Vereinfachung, können Sie für die Scheibe die Rotationsfrequenz $\Omega_K(R) = \sqrt{GM_*/R^3}$ verwenden, obwohl dies eigentlich nur gilt, wenn alle Masse im Massenmittelpunkt liegt.

   (b) [3 pt] Jetzt lassen wir 90% der Scheibe auf den Stern akkretieren, und nehmen an, dass der Stern einen verschwindend kleinen Drehimpuls hat. Die übrig gebliebenen 10% des Gases bewegen sich nach außen, um den Drehimpuls zu absorbieren, damit der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt. Machen Sie eine *ganz grobe* aber fundierte Abschätzung wie groß die Scheibe dann wird.

   (c) [3 pt] Wie groß muss die durchschnittliche Akkretionsrate sein, um den Stern innerhalb von etwa 1 Million Jahren zu bilden? In dieser Phase heißt die Scheibe eine proto*stellare* Scheibe.

   (d) [3 pt] Nach etwa 1 Million Jahren, ist die Akkretionsrate in der Scheibe meist auf etwa $\sim 10^{-8}\,M_\odot/{\rm year}$ gesunken. In dieser Phase heißt die Scheibe eine proto*planetare* Scheibe, da vermutet wird, dass sich in dieser Phase Planeten bilden. Mit einer Scheibenmasse von $\sim 0.1\,M_\odot$, was ist die erwartete Lebensdauer der Scheibe[4]?

[4] Natürlich erwartet man nicht, dass die Akkretionsrate konstant bleibt. Man erwartet eher, dass sich die Scheibe exponentiell entleert (also dass immer *etwas* übrig bleibt, nämlich die Masse, die immer weiter nach außen geht, um Drehimpuls aufzunehmen.). Für diese Aufgabe benutzen wir aber, der Einfachheit wegen, eine konstante Akkretionsrate. Apropos: es gibt weitere Prozesse, die ab etwa 10 Million Jahren die verbleibende Scheibe vernichten (Photoevaporation, Planetenentstehung etc.).

2. **Runaway growth**
In der Vorlesung haben wir hergeleitet, dass der Radius eines Planeten-Embryos folgendermaßen durch Akkretion von Planetesimalen wächst:

$$\frac{dr_{\rm em}(t)}{dt} = \frac{\Sigma_{\rm pts}\,\Omega_K}{8\xi_{\rm em}}\left(1+\frac{v_{\rm esc}^2}{\Delta v^2}\right) \tag{14}$$

was äquivalent ist mit:

$$\frac{dm_{\rm em}(t)}{dt} = \frac{\pi\Sigma_{\rm pts}\,\Omega_K}{2}r_{\rm em}(t)^2\left(1+\frac{v_{\rm esc}^2}{\Delta v^2}\right) \tag{15}$$

Nehmen wir nun an, dass die Planetesimalen eine Geschwindigkeitsdispersion Δv haben, die immer sehr viel kleiner ist als die Fluchtgeschwindigkeit des Embryos: $\Delta v \ll v_{\rm esc}$. Damit kann $(1 + v_{\rm esc}^2/\Delta v^2)$ durch $(v_{\rm esc}/\Delta v)^2$ ersetzt werden.

(a) [3 pt] Beweisen Sie nun, dass

$$\frac{dm_{\rm em}(t)}{dt} \propto m_{\rm em}(t)^{4/3} \tag{16}$$

(nehmen Sie $\Sigma_{\rm pts}$ und Δv konstant an).

(b) [2 pt] Zeigen Sie, dass dies folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{d\ln m_{\rm em}(t)}{dt} \propto m_{\rm em}(t)^{1/3} \tag{17}$$

(c) [3 pt] Betrachten wir nun die Situation, dass es mehrere Embryos in der Scheibe gibt, die jedoch weit genug von einander entfernt sind, dass sie sich nicht gegenseitig beeinflüssen, jedoch nah genug, dass sie für die Formel die wir hergeleitet haben de-facto an derselben Stelle R sind. Das allergrößte Embryo hat am Zeitpunk t eine Masse $m_a(t)$, und das zweitgrößte Embryo eine Masse $m_b(t) < m_a(t)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d\ln(m_a(t)/m_b(t))}{dt} > 0 \tag{18}$$

Was wir hieraus lernen ist, dass das Verhältnis der Massen der größten und zweitgrößten Embryos immer extremer wird. Mit anderen Worten: der Gewinner gewinnt immer deutlicher, und dominiert bald alle. Dies nennt sich auf English “runaway growth”, weil der Gewinner sozusagen davon rennt, und die anderen weit hinter sich lässt.