Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Astronomie (WS2012/13)

Cornelis Dullemond, Ralf Klessen

Kapitel 6

20 Punkte

1. Hertzsprung-Russel Diagramm für einfach Modellsterne

Betrachten Sie für diese Aufgabe eine Familie chemisch homogener Sternmodelle, die alle untereinander ähnlich sind und sich nur in ihrer Masse M und ihrem Radius R unterscheiden. Wir führen den dimensionslosen Radius $x = r/R$ ein und definieren die Ähnlichkeitsfuktionen $F(x)$, so dass gilt,

$$\rho(r) = \frac{M}{R^3} F_\rho(x) \qquad \text{und} \qquad m(r) = M\, F_m(x)\,.$$

Wir nehmen an, dass für diese Sterne eine ideale Zustandsgleichung gilt, $P = \rho k_\mathrm{B} T/\mu_m$, mit dem Druck P und der Temperatur T sowie der Boltzmann-Konstante k_B und der mittleren Teilchenmasse μ_m. Verwenden Sie den Ansatz, dass die Energie aus dem Sterninneren über Strahlungsprozesse mit Kramer's Opazität, $\kappa \propto \rho T^{-7/2}$ (nach Henrik Kramer 1894 - 1952), nach außen transportiert wird und dass diese Energie durch Kernfusion über die PP-Kette (Energieerzeugungsrate $\varepsilon_\mathrm{PP} \propto \rho^2 T^4$) produziert wird.

(a) Verwenden Sie die in der Vorlesung eingeführten Sternaufbaugleichungen, um die Skalierungsfunktionen für den Druck P, die Temperatur T, und die mit radiativen Transportprozessen und Kernfusion verbundenen Energieflüsse L_rad und L_nuc zu berechnen. Sie erhalten:

$$\begin{aligned}
P(r) &= \frac{M^2}{R^4} F_P(x)\,,\\
T(r) &= \frac{M}{R} F_T(x)\,,\\
L_\mathrm{rad}(r) &= \frac{M^{5.5}}{R^{0.5}} F_\mathrm{rad}(x)\,,\\
L_\mathrm{nuc}(r) &= \frac{M^6}{R^7} F_\mathrm{nuc}(x)\,.
\end{aligned}$$

Die Skalierungsfunktionen $F(x)$ sind dabei wieder für alle Sternmodelle gleich.

(6 Punkte)

(b) Beide Energieflüsse weisen unterschiedliches Skalierungsverhalten auf. Während der Energiefluss durch radiative Diffusion nur langsam wächst, wenn der Stern kontrahiert, steigt der durch Kernfusion erzeugte Fluss rapide an. Skizzieren Sie L_rad und L_nuc als Funktion des Radius. Bestimmen Sie den Radius und die Leuchtkraft in Abhängigkeit der Masse, für den Zustand bei dem die Energieerzeugung durch den PP-Prozess im Sterninneren den Energieverlust durch

Abstrahlung an der Sternoberfläche genau kompensiert. Der Stern ist dann im Quasi-Gleichgewicht. Das definiert die Hauptreihe im Hertzsprung-Russell Diagramm. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass alle Hauptreihensterne einer homologen Modellfamilie auf einer Geraden liegen mit

$$L \propto T^{4.17} .$$

Zur Erinnerung, die Leuchtkraft hängt sowohl von der Temperatur als auch vom Radius ab. (2 Punkte)

2. Notwendige Temperatur zur Überwindung der Coulomb-Barriere

(a) Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Gleichgewicht für den quadratischen Mittelwert der Geschwindigkeit (RMS-Geschwindigkeit $v_{\rm rms}$, vom Englischen *root mean square velocity*) der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$n(v)\mathrm{d}v = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2k_{\rm B}T}\right) \mathrm{d}v \tag{1}$$

der Ausdruck $v_{\rm rms}^2 = 3k_{\rm B}T/m$ gilt, wobei wieder $k_{\rm B}$ und T die Boltzmann-Konstante und die Temperatur des Systems sind. (3 Punkte)

(b) Betrachten Sie den rein klassischen Grenzwert und vernachlässigen Sie quantenmechanisches Tunneln. Berechnen Sie die Temperatur T, die notwendig ist, um zwei Protonen zur Kollision zu bringen. Nehmen Sie dabei an, dass die Protonen jeweils das zehnfache der RMS-Geschwindigkeit haben und dass es zur Kollision kommt, d.h. dass die Kernkräfte die Coulomb-Abstoßung überwinden, wenn sich die Protonen bis auf $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ genähert haben. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Zentraltemperatur der Sonne (siehe Aufgabenblatt 5). (3 Punkte)

(c) Was ist der statistische Anteil an Protonen mit der Geschwindigkeit $v \geq 10\, v_{\rm rms}$? (2 Punkte)

(d) Nehmen Sie nun vereinfachend an, die Sonne bestehe zu 100% aus Wasserstoff. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es zur Kernfusion im Sonneninneren kommt. Kann der hier diskutierte klassische Prozess die Leuchtkraft der Sonne erklären? (2 Punkte)