Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)

Cornelis Dullemond

Kapitel 8: Komplexe Zahlen

1. Bringen Sie die folgenden Formeln in $a + bi$ Form (z.B. $(2 + 2i) + i = 2 + 3i$):
   (a) $(3 + 7i) + (3 - 7i)$ (b) $(3 + 7i) - (3 - 7i)$ (c) $(3i - 6) + (3 - 6i)$
   (d) $(1 + i)^2$ (e) $(1 - i)^2$ (f) $(3 - i)(2 + 2i)$
   (g) $(3 - i)(2 + 2i)^*$ (h) $((3 - i)(2 + 2i))^*$

2. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Ebene, führen Sie die Multiplikation aus, und zeichnen Sie die Ergenbisse. Berechnen Sie die Winkel der zwei ursprünglichen Zahlen, und die Ergebnisse, und zeigen Sie damit, dass die Additions-Regel für den Winkel tatsächlich gilt.
   (a) $1 + i$ und $1 - i$ (b) $1 + 2i$ und $2 + i$

3. Man kann, für jede Zahl $a + bi$, eine Zahl r und θ finden für die gilt $a + bi = re^{i\theta}$. Dies ist die Exponentialform. Allerdings ist θ nicht eindeutig: Es gibt eine bestimmte Freiheit in der Wahl von θ. Welche?

4. Bringen Sie die folgenden Zahlen in Exponentialform:
   (a) i (b) $(1 + i)$ (c) $(1 + i)^*$

5. Beweisen Sie, mit der Information aus der Zusammenfassung, die Eulersche Formel:
$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi) \tag{1}$$

6. Beweisen Sie, mit der Eulerschen Formel, dass
$$\text{(a)}\quad \cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \qquad \text{und} \qquad \text{(b)}\quad \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \tag{2}$$

7. Beweisen Sie, mit den o.g. Formeln für $\cos\phi$ und $\sin\phi$ die folgenden trigonometrischen Formeln:
   (a) $\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$
   (b) $\sin^2(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\phi)$

8. Zeichnen Sie die folgenden Funktionen im Bereich $0 < t < \pi$
   (a) $f(t) = \mathrm{Re}(e^{4it})$
   (b) $f(t) = \mathrm{Re}(e^{-t})$
   (c) $f(t) = \mathrm{Re}(e^{-t+4it})$

9. Berechnen Sie
$$\frac{1}{a+bi} \tag{3}$$
und sagen Sie, in Worten, was das für den Winkel und den Betrag bedeutet (natürlich im Verhältnis zum Winkel und Betrag von $a+bi$).
Tipp: Multiplizieren Sie Zähler und Nenner des Bruches mit einer Zahl, die so gewählt ist, sodass der Nenner reel wird.

10. Berechnen Sie
$$\text{(a)} \quad \frac{c+di}{a+bi} \qquad \text{(b)} \quad \frac{re^{i\theta}}{se^{i\phi}} \tag{4}$$
Hinweis: (a) in $x+iy$ Form und (b) in Exponentialform.

11. Mit der Exponentialform ist es einfach zu sehen, dass $\sqrt{re^{i\phi}} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}$, weil $(\sqrt{r}e^{i\phi/2})^2 = re^{i2\phi/2} = re^{i\phi}$. Aber es gibt noch eine andere Zahl für die gilt, dass das Quadrat gleich $re^{i\phi}$ ist. Welche? Gibt es noch mehrere solche Zahlen, oder gibt es insgesammt nur zwei?

12. Was sind die möglichen Lösungen von $(re^{i\phi})^{1/3}$?