

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Reihen und Taylorentwicklung

1. Bestimme den Wert der folgenden Reihen:

$$(a) \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} \cdot \frac{3}{4} + \cdots \quad (1)$$

$$(b) \quad \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots \quad (2)$$

2. Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis $\mathcal{O}(x^3)$ der folgenden Funktionen um $x = 0$:

$$(a) f(x) = \sqrt{1+x} \quad (b) f(x) = \sinh x \quad (c) f(x) = e^{x/2}$$

3. Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis $\mathcal{O}((x-x_0)^3)$ der folgenden Funktionen um $x_0 = 1$:

$$(a) f(x) = \sqrt{x} \quad (b) f(x) = \cos(\pi x)$$

4. Benutzen Sie eine Taylorentwicklung um folgenden Limiten auszuwerten:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$
$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cos(\pi x/2)} \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$$

5. L'Hospital's Regel besagt, dass, wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ beide gegen Null gehen für $x \rightarrow x_0$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (3)$$

wenn $g'(x_0) \neq 0$. Beweisen Sie dies mit Hilfe von Taylor-Entwicklungen.