Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)

Cornelis Dullemond

Kapitel 9: Differenzialgleichungen (Teil 1)

1 Differenzialgleichung: Die einfachste Beispiele

Vielleicht das einfachste Beispiel einer Differenzialgleichung (DG) ist:

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 \tag{1}$$

Gesucht ist die Funktion $f(x)$. Die Lösung ist: $f(x) = x + C$, wo C eine Konstante ist. Ein etwas allgemeineres Beispiel:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \tag{2}$$

für eine bekannte Funktion $g(x)$. Gesucht ist die Funktion $f(x)$. Die Lösung ist:

$$f(x) = \int g(x)dx + C \tag{3}$$

In all diesen Fällen kann man die Gleichung einfach integrieren um die Lösung zu erhalten. Der Grund, warum diese Beispiele so einfach sind, ist, weil die Funktion $f(x)$ nur in der Ableitung auftaucht, und diese auch nur einmal in der Gleichung auftritt. Im Allgemeinen wird man aber mit Differenzialgleichungen konfrontiert, die nicht so einfach zu integrieren sind.

2 Homogene lineare DG erster Ordnung

Betrachten wir eine etwas schwierigere Differentialgleichung:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) \tag{4}$$

Hier können wir leider nicht mehr einfach integrieren. Hier ist Nachdenken gefragt: Einen systematischen Rechenweg zur Lösung gibt es hier nicht. Also, welche Funktion kennen wir, die sich selbst als Ableitung hat? Die Antwort lautet: $f(x) = e^x$. Oder $f(x) = 2e^x$. Genau gesagt: alle Funktionen

$$f(x) = Ae^x \tag{5}$$

mit beliebige A (die auch komplex sein darf!). Und noch etwas allgemeiner:

$$\frac{df(x)}{dx} = pf(x) \tag{6}$$

mit p eine beliebige, aber konstante Zahl (der auch komplex sein darf). Die Lösung:

$$f(x) = Ae^{px} \tag{7}$$

Man sieht, das es hier, *anstatt* einer Integrationskonstante, einen Integrationsmultiplikator gibt, nämlich A. Also: $f(x) = e^{px} + 2$ ist *keine* Lösung.

Als Anwendungsbeispiel nehmen wir den radioaktiven Zerfall eines Materials. Am Zeitpunkt $t = 0$ fangen wir mit y_0 kilogram an. Die Zerfallsrate pro Atom beträgt 0.1 sec^{-1}. Die Differenzialgleichung für die Menge übrig-gebliebenes Material $y(t)$ ist dann

$$\frac{dy(t)}{dt} = -0.1\, y(t) \tag{8}$$

Die Lösung ist $y(t) = Ae^{-0.1\,t}$. Wir wählen A so, dass am Zeitpunkt $t = 0$ gilt, dass $y(t = 0) = y_0$, also $A = y_0$.

Die Differenzialgleichung 6 ist *linear*, weil die Funktion $f(x)$ und seine Ableitungen immer linear auftauchen (also nicht $f(x)^2$ oder $\sqrt{df(x)/dx}$ oder so). Sie ist *homogen linear* weil wenn es zwei Lösungen gibt, $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so ist die Summe $f_1(x) + f_2(x)$ auch eine Lösung. Und sie ist *erster Ordnung*, weil nur die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $df(x)/dx$ tauchen auf.

Ausserdem haben sie, in diesem Fall, konstante Koeffizienten (d.h. p ist unabhängig von x), was die Lösung auch einfacher macht.

Sobald man nicht-konstante Koeffizienten benutzt, wird es schon schwieriger. Beispiel:

$$\frac{df(x)}{dx} = x\, f(x) \tag{9}$$

Dies ist noch immer eine homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Aber hier müssen wir noch ein bisschen tiefer nachdenken, und auch hier gibt es keinen direkten Rechenweg. Die Lösung lautet $f(x) = Ae^{x^2/2}$. Fazit: Man muss oft einfach Erfahrung mit Differenzieren haben, sodass man mit ein wenig clever ausprobieren die Lösung findet.

3 Inhomogene lineare DG erster Ordnung

Betrachten wir das Beispiel

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) + 1 \tag{10}$$

Dies ist offensichtlich eine Mischung aus Gl. 1 und Gl. 4. Mit Einsetzen von $g(x) = f(x)+1$ sieht man, dass die allgemeine Lösung lautet:

$$f(x) = Ae^{x} - 1 \tag{11}$$

für beliebige A. Also gibt es auch hier keine Integrationskonstante. Und der Integrationsmultiplikator A gilt nur für den ersten Teil, also nicht für die 1. Die Lösung besteht also aus zwei Teilen: die *partikuläre Lösung*, in diesen Fall die -1, und die *homogene Lösung* Ae^x. Man darf beliebig viele homogene Lösungen dazu addieren (d.h. man darf A beliebig wählen), aber man hat nur eine partikuläre Lösung.

Weiteres Beispiel:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) + x \tag{12}$$

Die partikuläre Lösung ist $f(x) = -x - 1$. Die allgemeine Lösung ist also

$$f(x) = Ae^x - x - 1 \tag{13}$$

Hinweis: Für Differenzialgleichungen erster Ordnung gibt es immer einen freien Koeffizient. In diesen Fall ist dies A.

4 Die Methode des "Ansatzes"

Wir haben jetzt gesehen, dass es in vielen Fällen keinen direkten Weg gibt zur Lösung einer Differenzialgleichung. Viel mehr muss man oft einfach ausprobieren. Natürlich hilft es sehr, wenn man durch Erfahrung (und oft auch gutes Geschick), gleich schon die richtige Allgemeinform der Lösung errät. So eine errätene Allgemeinform der Lösung (richtig oder falsch) nennt sich "Ansatz", ein deutsches Wort dass so auch in anderen Sprachen übernommen wurde. Nehmen wir die Differenzialgleichung 12 als Beispiel. Wir erkennen aus Erfahrung (siehe Gleichung 4), dass es etwas mit einer Exponenzialfunktion zu tun haben könnte, aber irgendwas muss noch dazu kommen, um dem $+x$ Term in Gleichung 12 gerecht zu werden. Dies könnte uns also inspirieren, etwas in der Art

$$f(x) = Ae^{Bx} + C + Dx + Ex^2 \tag{14}$$

zu probieren: eine Exponenzialfunktion plus ein Polynom. Wir setzen dies in Gleichung 12 ein und erhalten

$$ABe^{Bx} + D + 2Ex = Ae^{Bx} + C + (D + 1)x + Ex^2 \tag{15}$$

dies muss für alle x gelten, also bitte nicht lösen nach x... Stattdessen bringen wir alles auf die linke Seite:

$$(AB - A)e^{Bx} + (D - C) + (2E - D - 1)x - Ex^2 = 0 \tag{16}$$

Wir haben jetzt eine Summe von 4 unterschiedlichen Funktionen. Die Summe der Funktionen muss für alle x-Werte Null sein. Da die Funktionen unterschiedlich sind, bedeutet dies, dass die jeweilige Funktion jeweils Null sein muß. Also stellen wir fest...

- dass $E = 0$, damit die quadratische Funktion Null ist,
- dass $2E - D - 1 = 0$, damit die lineare Funktion Null ist. Also mit $E = 0$ erhalten wir $D = -1$,
- dass $D - C = 0$, also mit $D = -1$ erhalten wir $C = -1$,
- und dass $(AB - A) = 0$, also $B = 1$.

Damit haben wir die Lösung gefunden. Als einziger freier Koeffizient bleibt A.

5 Homogene lineare DG zweiter Ordnung

Lineare DG zweiter Ordnung findet man in der Physik von Schwingungen. Man nehme als Beispiel eine Kugel mit Masse m auf eine glatte horizontale Ebene. Die Kugel ist mit einer horizontalen Feder an einer Wand verbunden. Die Ruhe-Position der Kugel (so dass die Feder keine Spannung hat) nennen wir $x = 0$. Wenn wir die Kugel richtung der Wand drücken, so wird $x < 0$, und wenn wir die Kugel weg von der Wand ziehen, so wird $x > 0$. Die Kraft, die die Feder auf die Kugel ausübt ist $f = -kx$. Diese Kraft bewirkt eine Beschleunigung der Kugel, die laut Newtonsche Mechanik $ma = f$ lautet, also

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{17}$$

Dies ist eine homogene lineare DG zweiter Ordnung in $x(t)$. In eine etwas andere (mehr traditionelle) Form:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{18}$$

Diese Gleichung ist offensichtlich homogen linear, d.h. die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung. Aber auch hier gibt es keinen direkten Lösungsweg. Es stellt sich heraus (verifizieren Sie dies!), dass die Lösung

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{19}$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$ ist, wo A und B beliebige reelle Zahlen sind. Man sieht also, dass die Lösung tatsächlich eine Schwingung ist.

Interessant ist, dass die komplexe Funktion

$$\psi(t) = Ce^{i\omega t} \tag{20}$$

mit C eine komplexe Konstante, auch eine Lösung ist. Auch mit $\omega = -\sqrt{k/m}$ ist dies eine Lösung. Tatsächlich gilt (verifizieren Sie dies!), dass

$$x(t) = \mathrm{Re}(\psi(t)) \qquad \text{und} \qquad C = A - iB \tag{21}$$

Es stellt sich heraus, dass es oft viel einfacher ist, mit der komplexen Funktion $\psi(t)$ zu rechnen, als mit der reelen Funktion $x(t)$.

Man sieht dies, z.B., wenn wir eine weitere Kraft hinzufügen: eine Reibungskraft deren Stärke proportional mit der Geschwindigkeit geht: $f_{\mathrm{reibung}} = -\gamma dx(t)/dt$. Die DG wird:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{22}$$

Nehmen wir als Ansatz $x(t) = Ce^{i\Omega t}$, und erlauben, dass Ω eine komplexe Koeffizient ist (wir unterlassen hier den Unterschied zwischen $\psi(t)$ und $x(t)$). Wir setzen ein, und erhalten so die so genannten “Dispersionsrelation” des *gedämpften Oszillators*:

$$-\Omega^2 + i\Omega\frac{\gamma}{m} + \frac{k}{m} = 0 \tag{23}$$

Wenn wir $\Omega = \omega + i\lambda$ schreiben, so erhalten wir hieraus zwei reelle Gleichungen:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \lambda^2 - \lambda\frac{\gamma}{m} \tag{24}$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{2m} \tag{25}$$

Einsetzen von Gl. 25 in Gl. 24 ergibt

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2} \tag{26}$$

Hinweis: Für Differenzialgleichungen zweiter Ordnung gibt es immer zwei freie Koeffizienten.