Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)

Cornelis Dullemond

Kapitel 7: Matrizen

1 Zwei Arten von "Räumen"

Den Begriff "Raum" kennen wir aus alltägliche Erfahrung eigentlich nur als dem 3-D Raum in den wir leben. In der Physik und Mathematik ist der Begriff "Raum" allerdings viel allgemeiner. Zum Beispiel: die Anzahl von Füchsen, Wölfen, Bären, Hischen und Vögeln in Sibirien kann man als Vektor in 5-dimensionalem abstraktem "Mengen-Raum" schreiben: $(n_f, n_w, n_b, n_h, n_v)$.

So wie wir im letzten Kapitel schon gesehen haben, hat der "normale" Raum (unser 3-D Raum den wir aus altäglichen Erfahrung kennen) die besondere Eigenschaft, dass sich kein eindeutiger "Nullpunkt" erkennen lässt. Man kann den $(0, 0, 0)$-Punkt des Koordinatensystems an einen beliebigen Ort legen: es gibt keine "richtige" oder "falsche" Wahl. Mit anderen Worten: unser normaler Raum ist "verschiebungssymmetrisch". Das gilt allerdings nicht für einen Mengen-Vektor wie $(n_f, n_w, n_b, n_h, n_v)$. Null Füchse ist null Füchse!

Lass uns Räume, die einen bedeutungsvollen Nullpunkt haben, und deshalb nicht verschiebungssymmetrisch sind, "lineare Räume" nennen. In der "linearen Algebra" betrachten wir Vektoren in linearen Räumen. Diese Räume sind abstrakt und können beliebig viele Dimensionen N haben.

Vektoren in linearen Räumen sind sehr ähnlich wie Vektoren in "normalen" Räumen, die wir im letzten Kapitel definiert haben. Sie fügen sich nach den selben Additions-Regeln. In linearen Räumen ist oft auch die "Norm" definiert: Die Rechenregel mit dem man die "offizielle" Länge eines Vektors feststellen kann (siehe unten). Diese Norm erlaubt es auch das innere Produkt zwischen zwei Vektoren zu definieren. Das äussere Produkt ist allerdings nicht immer sinnvoll definiert, und wenn, dann nur für 3-dimensionale Räume ($N = 3$).

2 Lineare Transformationen in einem linearen Raum

Jetzt nehmen wir mal als Beispiel einen 2-dimensionalen Raum und betrachten darin einen Vektor $\mathbf{v} = (x, y)$. Wir stellen uns die Frage, wie würde dieser Vektor aussehen, wenn man ihn um einen Winkel θ entgegen die Uhr drehen würde? Die Antwort lautet: Der resultierende Vektor $\mathbf{v}' = (x', y')$ wird die Komponenten

$$x' = \cos(\theta)\, x - \sin(\theta)\, y \tag{1}$$

$$y' = \sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y \tag{2}$$

haben. Man sieht, die x' und y' werden eine lineare Mischung aus x und y werden. Es stellt sich heraus, dass solche linearen Mischungen von Komponenten in der Praxis sehr häufig vorkommen. Man nennt sie “lineare Transformationen”. Im Allgemeinen kann man eine lineare Transformation eines N-Dimensionalen Vektors $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ folgendermaßen schreiben:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,N}x_N && (3)\\
x'_2 &= A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,N}x_N && (4)\\
\vdots &= \vdots && (5)\\
x'_1 &= A_{N,1}x_1 + A_{N,2}x_2 + \cdots + A_{N,N}x_N && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}
$$

oder kürzer:

$$x'_k = \sum_{i=1}^{N} A_{k,i}x_i \tag{8}$$

wo $A_{k,i}$ die Zahlen sind, die die lineare Transformation bestimmen. Man kann sie als *Matrix* darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Im 2-D Beispiel der Rotation haben wir also

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

3 Matrix-Vektor Multiplikation

Um die linearen Transformationen mit Matrizen vereinfacht darzustellen wurde irgendwann eine Multiplikationsregel festgelegt: Wenn man eine Matrix A vor einem Vektor $\mathbf{x}$ schreibt, so erhält man einen neuen Vektor $\mathbf{x}'$ dessen Komponenten der o.g. linearen Transformation folgen:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} && (11)\\
&= \begin{pmatrix} A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,N}x_N \\ \vdots \\ A_{N,1}x_1 + \cdots + A_{N,N}x_N \end{pmatrix} && (12)
\end{aligned}
$$

Wie man sieht werden *immer die Komponenten einer Zeile der Matrix mit den Komponenten der Spalte des Vektors* multipliziert. Diese “Zeile-mit-Spalte-Regel” werden wir noch viel allgemeiner anwenden.

4 Matrizen: Allgemeiner

Eine Matrix muss nicht unbedingt $N \times N$ Komponenten haben. Es kann auch $N \times M$ Komponenten haben, wo N für die Anzahl der Zeilen steht und M für die Anzahl der Spalten. Einen N-dimensionalen Vektor kann man also als $N \times 1$ Matrix betrachten, oder wenn man es horizontal schreibt, als $1 \times N$ Matrix. Zum Beispiel, kann man das innere Produkt der Vektoren $\mathbf{v} = (x, y)$ und $\mathbf{w} = a, b$ folgendermaßen schreiben

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (xa + yb) \tag{13}$$

Hier haben wir $\mathbf{v}$ als 1×2 Matrix und $\mathbf{w}$ als 2×1 Matrix geschrieben. Als Ergebnis erhalten wir eine $1{\times}1$ Matrix mit als einziger Komponente die Zahl gehöhrend zu $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

Auf diese Weise betrachtet, lässt sich die Matrix-Vektor Multiplikation einfach auf Matrix-Matrix Multiplikation generalisieren: man wendet einfach wieder die "Zeile-mit-Spalte-Regel" an:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{K,1} & \cdots & A_{K,L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{L,1} & \cdots & B_{L,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{L} A_{1,i} B_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{L} A_{1,i} B_{i,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{L} A_{K,i} B_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{L} A_{K,i} B_{i,M} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Wichtig: Man kann eine $K \times$ Ł Matrix nur mit einer $N \times M$ Matrix multiplizieren wenn $L = N$.

Mit unserem Beispiel mit dem zwei Vektoren, $\mathbf{v} = (x, y)$ und $\mathbf{w} = a, b$ gilt also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{pmatrix} \tag{15}$$

Wichtig: Man sieht, dass hier eine $2{\times}2$ Matrix rauskommt, obwohl bei Gleichung 13 eine $1{\times}1$ Matrix rauskommt.

Nun stellt sich die Frage: Was ist die Bedeutung einer $N \times M$ Matrix, wenn $N \neq M$? Für eine lineare Transformation im N-dimensionalem Raum braucht man eine $N \times M$ Matrix mit $N = M$, weil es eine Projektion von dem Raum auf sichselbst darstellt: Eine Transformation ist per Definition eine Projektion von dem Raum auf sichselbst. Man kann sich aber auch allgemeinere Projektionen vorstellen: von einem N-dimensionalen Raum $\mathcal{R}$ auf einen M-dimensionalen Raum $\mathcal{S}$. Wenn $M = N$, so erhält man eine $N \times N$ Matrix, obwohl es keine Transformation ist. Aber im Allgemeinen kann $M \neq N$ sein.

5 Aufeinanderfolgende lineare Transformationen

Zurück zu Transformationen (also $N \times N$ Matrizen). Was passiert, wenn wir zwei aufeinanderfolgende lineare Transformationen durchführen? Machen wir zuerst die erste Transformation:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{16}$$

wo A die Transformationsmatrix ist. Nun machen wir die zweite Transformation:

$$\mathbf{x}'' = B\mathbf{x}' = B(A\mathbf{x}) \tag{17}$$

Es stellt sich heraus (siehe Übungen), dass

$$B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = BA\mathbf{x} \tag{18}$$

Mit anderen Worten: Es ist egal, ob wir zuerst B mit A multiplizieren oder zuerst A mit $\mathbf{x}$. Die Matrix BA ist also die Matrix die Kombination beider Transformationen durchführt. Die Reihenfolge ist allerdings in der Regel wichtig:

$$BA \neq AB \tag{19}$$

(es gibt natürlich Ausnahmen von dieser Regel).

6 Transponent und Inverse einer Matrix

Zum Schluss besprechen wir noch zwei oft vorkommende Arten von Umwandlungen von Matrizen. Als erstes die einfachste: die Transponent:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,M} \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,M} & \cdots & A_{N,M} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Das heißt: Die Komponenten werden einfach in dem Diagonal gespiegelt: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Das innere Produkt zweier Vektoren kann man also als $\mathbf{v}^T\mathbf{w}$ schreiben.

Als zweitest die schwierigere: die Inverse. Dies ist nur definiert für Matrizen A mit $N \times N$ Komponenten, und wird A^{-1} geschrieben. *Wichtig:* das heißt *nicht*, dass die jeweiligen Komponenten einfach invertiert werden! Es ist um einiges schwieriger. Die Matrix A^{-1} ist so definiert, dass

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Die Matrix an der rechten Seite ist die *Einheitsmatrix*. Um die Inverse A^{-1} einer Matrix A zu bestimmen, braucht man eine aufwendige Prozedur. Wir kommen in einem späteren Kapitel noch darauf zurück. Im Moment reicht es, zu wissen, dass es eine Inverse einer Matrix (meistens) gibt.