Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)

Cornelis Dullemond

Kapitel 6: Vektorfelder

1 Skalarfelder - Funktionen mehrerer Variablen

Wir haben am Anfang des Kurses Funktionen von einer Variablen betrachtet, zum Beispiel $f(x)$. Man kann dies einfach generalisieren auf mehrere Dimensionen, zum Beispiel $f(x, y)$ oder $f(x, y, z)$. Um so eine Funktion auf Papier darzustellen (zu "plotten") ist allerdings nicht so einfach. Für zwei-dimensionalen Funktionen, $f(x, y)$, kann man zum Beispiel Kontur-Plots machen. Oder man kann eine 2-D Oberfläche im 3-D Raum (mit $z = f(x, y)$) im Perspektiv darstellen. Für 3-D Funktionen, $f(x, y, z)$, wird es noch schwieriger um es sinnvoll auf Papier oder Bildschirm darzustellen. Man macht dann oft 2-D oder 1-D Schnitte an mehreren Stellen um einen Eindruck davon zu bekommen, wie die Funktion aussieht. Mathematisch gibt es allerdings keine Grenze an der Anzahl der Variablen (=Dimensionen). Ein "Skalarfeld" in unserem 3-D Raum ist eigentlich nichts anderes als eine Funktion von (x, y, z). Ein "Skalar" ist einfach eine Zahl, und diesen Begriff wird benutzt, um es von einem "Vektor" zu unterscheiden.

2 Partielle Differenziation

Ähnlich wie bei Funktionen von einer Variablen können wir auch Funktionen von mehreren Variablen differenzieren. Allerdings müssen wir jetzt genau spezifizieren, nach welchen der Variablen wir differenzieren möchten. Dies wird mit dem Symbol ∂ festgelegt. Die "partielle Ableitung" von $f(x, y)$ nach x wird also $\partial f(x, y)/\partial x$ geschrieben. Zum Beispiel

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon,y)-f(x,y)}{\epsilon} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x,y+\epsilon)-f(x,y)}{\epsilon} \tag{2}$$

Und ähnlich fuer z.B. $\partial f(x, y, z)/\partial z$ etc. Wie man sieht: die Variation wird immer nur in einer der Variablen gemacht. Die anderen Variablen werden bei dieser Operation festgehalten: Man betrachtet sie als Konstante. Zum Beispiel:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{5}$$

Man kann auch mehrfach differenzieren:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \tag{9}$$

3 Vektorfelder

Genau so wie ein Skalarfeld eine Zuweisung eines Skalars zu jedem Ort (x, y, z) ist, so ist ein Vektorfeld eine Zuweisung eines Vektors zu jedem Ort (x, y, z). Wenn man den Vektor in Komponenten schreibt, $\mathbf{v} = (u, v, w)$, dann kann man jede Komponente als ein Art Skalarfeld betrachten: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$. Aber man muss hier aufpassen, dass wenn wir ein anderes Koordinatensysten wählen (eine Koordinatentransformation), dann verändern sich richtige Skalaren nicht, aber die Vektor-Komponenten schon. Beispiel: $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Wenn wir die x und y Koordinaten vertauschen (eine einfache Koordinatentransformation), so wird $\mathbf{v}(x', y', z') = (0, y', 0)$. Wir kommen in einem späteren Kapitel noch auf Koordinatentransformationen zurück.

Ein Vektorfeld ist oft schwierig darzustellen. Am einfachsten geht es, wenn man an regelmäßigen Abständen den lokalen Vektor mit einem "Pfeil" darstellt[1].

4 Gradient eines Skalarfeldes

Wie oben erwähnt, ist ein "Skalarfeld" nichts anderes als eine normale Funktion f als Funktion von Position (x, y, z) in einem (in diesem Bespiel 3-D) Raum. Der "Gradient" dieser Funktion $\mathrm{Grad} f \equiv \nabla f(x, y, z)$ ist ein Vektor zusammengestellt aus den partiellen Ableitungen nach den jeweiligen Variablen:

$$\mathrm{Grad}\ f(x,y,z) \equiv \nabla f(x,y,x) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right) \tag{10}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes ist also ein Vektorfeld. Die Bedeutung dieses Vektorfeldes ist die mehrdimensionale Erweiterung von der Ableitung in eine Dimension: Die Steigung der Funktion. In 1-D (i.e. $f(x)$) ist die Steigung der Funktion einfach die Ableitung $df(x)/dx$. Auch in 2-D haben Funktionen eine Steigung, aber in 2-D gibt es zusätzlich noch eine Richtung der Steigung. Die jeweiligen partiellen Ableitungen $\partial f(x, y)/\partial x$ und $\partial f(x, y)/\partial y$ sind die Steigungen in x- bzw. y-Richtung, und der Gradient is der Vektor dessen Richtung die Richtung der steilsten Steigung zeigt, und dessen Betrag die Steigung in dieser Richtung ist. Am einfachsten lässt sich dass illustrieren mit einer Höhenkarte von einer Berglandschaft: Die Funktion $h(x, y)$ gibt an, wie hoch über dem Meeresspiegel die Landschaft am Punkt (x, y) ist. Der Gradient $\nabla h(x, y)$ ist der Vektor dessen Richtung angibt, wie man am schnellsten hoch läuft (steilste Richtung), und dessen Betrag die Steigung ist.

[1]Ein nettes Applet um 3-D Vektorfelder zu visualisieren ist `http://www.falstad.com/vector3d/`

5 Vektorfeld als Strömungsfeld - Strömungslinien

Oft beschreibt ein Vektorfeld eine Strömung. Zum Beispiel: auf eine Wetterkarte zeigen die Pfeile an, wie stark, und in welcher Richtung der Wind weht: Die Strömung der Luft. Man könnte sich fragen, wenn man einen Ballon an der Stelle $\mathbf{r}_0$ und dem Zeitpunkt $t = 0$ auflässt, wo befindet er sich dann am Zeitpunkt $t > 0$? Wenn $\mathbf{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ die Windgeschwindigkeit beschreibt, so wird der Ballons sich nach einem kleinen Zeitschritt $t = \epsilon$ an Stelle

$$\mathbf{r}(\epsilon) \equiv \begin{pmatrix} x(\epsilon) \\ y(\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \tag{11}$$

befinden. Für den nächsten Schritt nehmen wir den Geschwindigkeitsvektor an der Stelle $\mathbf{r}(\epsilon)$:

$$\mathbf{r}(2\epsilon) \equiv \begin{pmatrix} x(2\epsilon) \\ y(2\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\epsilon) \\ y(\epsilon) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} u(x(\epsilon), y(\epsilon)) \\ v(x(\epsilon), y(\epsilon)) \end{pmatrix} \tag{12}$$

und so weiter. Man kan dies symbolisch als Integral aufschreiben:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{r}) dt' \tag{13}$$

Die Kurve $\mathbf{r}(t)$ beschreibt eine Strömungslinie.

6 Vektorfeld als Strömungsfeld - Divergenz

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines Strömungsfeldes ist, ob es "divergiert", "convergiert" oder "divergenz-frei" ist. Beispiel: Das Strömungsfeld $\mathbf{v}(x, y) = (x, y)$ divergiert, weil wenn man dort überall Ballone auflässt, sie von einander weg driften: die durchschnittliche Menge der Ballone pro Quadratkilometer wird mit der Zeit kleiner. Das Strömungsfeld $\mathbf{v}(x, y) = (-x, -y)$ convergiert, weil wenn man dort überall Ballone auflässt, sie auf einander zu driften: die durchschnittliche Menge der Ballone pro Quadratkilometer wird mit der Zeit immer größer, und sie driften alle gegen $\mathbf{r} = (0, 0)$, dem Konvergenzpunkt. Anderes Beispiel: $\mathbf{v}(x, y) = (x^2, 0)$. Hier ist das Strömungsfeld im Bereich $x < 0$ konvergent, aber im Bereich $x > 0$ divergent. Es stellt sich heraus, dass man die Eigenschaft, ob ein Strömungsfeld convergiert oder divergiert, lokal feststellen kann, indem man den "Divergenzoperator" Div$\equiv \nabla\cdot$ anwendet. In 2-D ist das folgendermaßen definiert:

$$\text{Div } \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \tag{14}$$

und ähnlich in 3-D und höheren dimensionen. Wichtig: die $\partial/\partial x$-Operator wirkt nur auf der u-Komponente (erste Komponente) des Vektors, und die $\partial/\partial x$-Operator wirkt nur auf der v-Komponente (zweite Komponente) des Vektors.

Lass uns die Divergenz von den o.g. Beispiele berechnen:

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 > 0 \qquad \text{(divergent)} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -2 < 0 \qquad \text{(convergent)} \tag{16}$$

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 2x \qquad \text{(divergent für } x > 0\text{, convergent für } x < 0) \tag{17}$$

7 Vektorfeld als Strömungsfeld - Rotation

Eine andere oft benutzte Vektor-Differenzialoperator ist die "Rotation". Die Rot$\equiv \nabla\times$ Operator[2] ist *nur in 3-D definiert*:

$$\text{Rot } \mathbf{v}(x,y,z) \equiv \nabla \times \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Dieser Vektor gibt an, wie sich die Strömung rotiert. Die Richtung des Vektors is die Rotationsachse, und der Betrag die Stärke der Rotation. Beispiel:

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\nabla \times \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Hier sieht man, dass die Richtung des Vektors tatsächlich die Drehachse ist. Und wenn man z.B. $\mathbf{v}(x,y,z) = (-2y, 2x, 0)$ nimmt (also zwei mal so starke Drehung), so wird tatsächlich auch der Betrag von $\nabla \times \mathbf{v}$ zwei mal so gross: 4.

8 Divergenz und Rotation eines Gradienten

Der Gradient eines Skalarfeldes $\nabla f(x,y,z)$ ist ein Vektorfeld. Also stellt sich die Frage, haben die Divergenz und Rotation dieses Vektorfeldes eine besondere Bedeutung? Lass uns zuerst die Rotation ausrechnen:

$$\nabla \times \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial z} - \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Die Rotation eines Gradienten ist also Null! Die Divergenz ist i. Allg. nicht Null, und der Operator $\nabla \cdot \nabla$ hat einen speziellen Namen: *Laplace operator*, und wird auch oft als $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$ geschrieben:

$$\Delta f(x,y,z) \equiv \nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \tag{23}$$

[2]Manchmal auch als Curl geschrieben.