

**Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)**

Cornelis Dullemond

Kapitel 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Teil 1)

1 Diskrete Zufallszahlen

Einen klassischen Würfel kann man als eine diskrete Zufallsvariable betrachten, die 6 mögliche Werte annehmen kann: 1,2,3,4,5 und 6. Jeder Wert hat die gleiche Wahrscheinlichkeit: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$. Die Summe der Werte P_n ist, per Definition, 1. Im Allgemeinen kann man eine Zufallsvariable x_n definieren wo die Wahrscheinlichkeiten nicht notwendigerweise gleich sind. Zum Beispiel:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2} \quad \text{mit} \quad P_1 = 0.1, \quad P_2 = 0.5, \quad P_3 = 0.4 \quad (1)$$

Das heißt, es gibt 20% Chance, dass man $x = \frac{1}{2}$ findet, 50% Chance, dass man $x = 1$ findet, und 40% Chance, dass man $x = \frac{3}{2}$ findet. Die Wahrscheinlichkeiten P_n sind immer auf 1 normiert:

$$\sum_{n=1}^N P_n = 1 \quad (2)$$

wo N die Zahl der möglichen Werten der Zufallsvariable x ist (im o.g. Beispiel also $N = 3$, und für einen Würfel $N = 6$). Der *Erwartungswert* von irgendeiner Funktion f von n (also f_n), schreibt man mit $\langle \rangle$ -Klammern:

$$\langle f \rangle \equiv \sum_{n=1}^N f_n P_n \quad (3)$$

2 Poissonverteilung

Es gibt auch unlimitierte diskrete Zufallszahlen. Ein sehr oft vorkommendes Beispiel ist die Poisson-Verteilung. Diese Verteilung erhält man z.B. wenn man während eines Regengusses misst, wie viele Tröpfchen innerhalb von 10 Sekunden in eine Teetasse fallen. Im Durchschnitt, wenn man dieses Experiment tausende Male wiederholt (oder mit tausenden identischen Teetassen gleichzeitig macht), werden es z.B. 5.734 sein. Aber das heißt, dass es mal 5, mal 6, mal 3 oder mal 8 sind. Die Frage ist also, wie ist die Chance, dass es n Regentröpfchen sind? Die Antwort ist (ohne Beweis) die *Poissonverteilung*:

$$P_n = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \quad (4)$$

In diesem Fall kann $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ sein. Die Zahl μ ist der Durchschnittswert. Im o.g. Beispiel gilt $\mu = 5.734$. Auch hier sind die P_n auf 1 normiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = 1 \quad (5)$$

Und wenn man den Durchschnitt, also den Erwartungswert von n , berechnet, so erhält man μ :

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \mu \quad (6)$$

(siehe Übungen).

3 Stetige (kontinuierliche) Zufallszahlen

Oft werden wir mit nicht-diskreten Zufallszahlen konfrontiert. Zum Beispiel der Messwert x eines Experiments. Es ist klar, dass dieser Wert nicht ganz willkürlich ist: er wird (hoffentlich) nah an dem Wert liegen, der das Ergebnis des Experiments darstellt. Es handelt sich also um einen Messwert mit einem *Fehler*. Der Fehler wird bei jeder Messung anders sein, wird sich jedoch in einem gewissen Bereich aufhalten. Man könnte sich also fragen: Was ist die Chance, dass wir genau den Wert $x = x_1$ messen? Leider ist die Antwort "0", weil man nie mit unendlicher Präzision (also unendlich viele Nachkommastellen) *genau* x_1 erhalten würde (wenn wir überhaupt so genau messen könnten, aber das ist eine andere Sache). Stattdessen müssen wir fragen: Wie ist die Chance, dass der Messwert zwischen x_1 und x_2 liegt? Nennen wir dies $P(x_1, x_2)$. Um dies für jedes Paar x_1 und x_2 zu beschreiben, definieren wir die *Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion* $p(x)$, so dass

$$P(x_1, x_2) \equiv \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion ist auf 1 normiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (8)$$

oder, wenn wir wissen, dass x immer zwischen x_{\min} und x_{\max} liegt, so schreibt man

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x) dx = 1 \quad (9)$$

Für einen infinitesimal kleinen Bereich $x \in [x, x + dx]$ (also $x_1 = x$, $x_2 = x + dx$) gilt

$$P(x, x + dx) = p(x) dx \quad (10)$$

Es muss also immer $p(x) \geq 0$ gelten. Man kann $p(x)$ auch *Wahrscheinlichkeitsdichte* nennen.

4 Normalverteilung

Wenn man mehrere Messungen von x durchführt, so sind die Messfehler meist "normalverteilt". Das heisst, die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ der Messung kann man folgendermaßen schreiben:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (11)$$

wo x_0 der "richtige" Wert ist und x der gemessene Wert. Das Symbol σ heißt die *Standardabweichung*, und das Quadrat σ^2 die *Varianz* (oder Streuung, oder mittlere quadratische Abweichung). Je kleiner σ , desto genauer die Messung. Die Normierungskonstante $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ ist so gewählt, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Leider hat diese Form von $p(x)$ kein analytisches unbestimmtes Integral. Aber das bestimmte Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ ist analytisch bekannt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \sqrt{2\pi} \quad (12)$$

Und das unbestimmte Integral, das nicht analytisch auszudrücken ist, ist aber in folgender Form als standard Funktion namens "Gaußsche Fehlerfunktion" (Eng.: gaussian error function) bekannt:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (13)$$

Dies kann man aus entsprechenden Tabellen entnehmen oder per Computer ausrechnen lassen. Es gilt $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$ und (ganz wichtig für hier unten) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$. Mit der Gaußschen Fehlerfunktion kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass z.B. x kleiner ist als y :

$$P(x < y) = \int_{-\infty}^y p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] dx \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y-x_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] d(x-x_0) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(y-x_0)/\sigma\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] d\left(\frac{x-x_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(y-x_0)/\sigma\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(y-x_0)/\sigma\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{y-x_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (19)$$

Man definiert den *Erwartungswert* von irgendeiner Funktion $f(x)$:

$$\langle f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \quad (20)$$

(ähnlich wie Gleichung 3 für den diskreten Fall). Man kann zeigen, dass $\langle x \rangle = x_0$ und $\langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2$ (siehe Übungen).

5 Fehlerfortpflanzung

Ein Fehler in einer Variable x führt zu einem Fehler in einer abhängigen Variable $y(x)$. Beispiel: Wir werfen einen Apfel mit einer Geschwindigkeit v_0 hoch und messen, wie hoch

er kommt bis er wieder zurückfällt. Laut Newtonsche Mechanik gilt $v(t) = v_0 - gt$ (mit g die Gravitationsbeschleunigung auf der Erde), und $z(t) = \int v(t)dt = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. Das Maximum wird erreicht, wenn $v(t) = 0$, also $t = v_0/g$, und so ist $z_{\max} = \frac{1}{2}v_0^2/g$. Nun erschleicht sich eine Ungenauigkeit in die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in dem Experiment ein. Die Standardabweichung σ_v ist zwar klein (d.h. $\sigma_v \ll \langle v_0 \rangle$) aber wir wollen genau wissen, wie sich das auf die Standardabweichung von z_{\max} auswirkt. Dies ist eine typische Frage der *Fehlerfortpflanzung*. In diesem Beispiel ist x ersetzt von v_0 und $y(x)$ von $z_{\max}(v_0)$.

Die Antwort kann man mit einer Taylorreihe herleiten (wir gehen wieder von x und $y(x)$ aus, und entwickeln um $x_1 \equiv \langle x \rangle$):

$$y(x) = y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) + \mathcal{O}((x - x_1)^2) \quad (21)$$

und bestimmen den Erwartungswert von $(y(x) - y(x_1))^2$:

$$\langle (y(x) - y(x_1))^2 \rangle = (y'(x_1))^2 \langle (x - x_1)^2 \rangle + \mathcal{O}((x - x_1)^3) \quad (22)$$

Das heißt dass (sofern der Fehler in x klein genug ist, dass man die Taylorreihe beim dritten Term abbrechen darf) der Erwartungswert $\langle y \rangle$ ist gleich $y(x_1)$, wie erwartet, und

$$\langle (y(x) - y(x_1))^2 \rangle \simeq \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1}^2 \langle (x - x_1)^2 \rangle \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1}^2 \sigma_x^2 \quad (23)$$

6 Summe von mehreren Zufallsvariablen

Oft ist ein Experiment von mehreren Fehlern behaftet. In vielen Fällen kann man, durch geschicktes Umschreiben der Gleichungen (und Anwendung von Taylorreihen wie oben praktiziert), den Fehler in dem End-Ergebnis als eine Summe von N Zufallsvariablen schreiben, die jeweils eine der Fehlerquellen beschreibt:

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_N \quad (24)$$

Wir nehmen an, dass all diese Fehler $x_1 \dots x_N$ völlig unabhängig von einander sind. Ohne Beweis, obwohl dies nicht schwierig ist, gilt dann dass

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{x_i}^2 \quad (25)$$

Für den Spezialfall, dass $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \dots = \sigma_{x_N}$, so gilt:

$$\sigma_y^2 = N\sigma_x^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \sqrt{N}\sigma_x \quad (26)$$

Das heißt, der Fehler in eine Summe von N identischen Variablen ist nicht N mal, sondern nur \sqrt{N} mal so groß, wie der Fehler der einzelnen Variablen.