Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2011/12)

Cornelis Dullemond

Kapitel 8: Vektorfelder

Viele der Beispiele in diesen Übungen haben direkte Relevanz für Elektromagnetismus.

1. Berechnen Sie den Gradient der folgenden Funktionen in 2-D, und zeichnen Sie (qualitativ) wie das Feld aussieht indem sie an regelmässigen Stellen Pfeile zeichnen:

   (a) $f(x,y) = x - y$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   (d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$

2. Berechnen Sie ∇^2 von

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

   (d) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3. Zeichnen Sie die folgenden Vektorfelder (qualitativ). Berechnen Sie deren Divergenz, und bestimmen Sie, für welche Bereiche das Feld divergiert oder konvergiert:

   (a) $\mathbf{v}(x,y) = (-x, y)$

   (b) $\mathbf{v}(x,y) = (x - x^3, y)$

   (c) $\mathbf{v}(x,y) = \left(x - \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$

4. Zeichnen Sie die folgenden Vektorfelder (qualitativ) in der (x,y)-Ebene. Berechnen Sie die Rotation.

   (a) $\mathbf{v}(x,y,z) = (-y, x, 0)$

   (b) $\mathbf{v}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$

5. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln, wo ψ ein Skalarfeld ist:

   (a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

   (b) $\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{A}$

   (c) $\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = (\nabla\psi) \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A}$