

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2012/13)

Cornelis Dullemond

Kapitel 8: Matrizen

Hinweis: Bitte immer alles begründen/beweisen, wenn möglich mit Formeln! Nur qualitative Antworten zählen ab jetzt nicht mehr...

1. Führen Sie die folgenden linearen Transformationen durch:

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

2. Führen Sie die folgenden Matrix-Matrix Multiplikationen durch:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (5)$$

3. Bestimmen Sie die $N \times N$ Matrix E , die jeden N -dimensionalen Vektor unverändert lässt.

4. Bestimmen Sie die $N \times N$ Matrix E , die jeden N -dimensionalen Vektor zwei mal so lang macht.

5. Bestimmen Sie die 3×3 Matrix E , die die erste (x -) Komponente $2 \times$ so groß macht, die zweite (y -) Komponente $4 \times$ so groß macht und die dritte (z -) Komponente $8 \times$ so groß macht.

6. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix im 3D Raum für eine Rotation um einen Winkel θ um:

- (a) die x -Achse
- (b) die y -Achse
- (c) die z -Achse

Hinweis: Beachten Sie dabei, dass sie richtig festlegen, in welcher Richtung gedreht wird, wenn $\theta > 0$ (rechte-Hand-Regel).

7. Bleiben wir in 3-D und rotieren Sie¹

- (a) $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ um einen Winkel θ um die z -Achse
- (b) $\mathbf{v} = (1, 0, 3)^T$ um einen Winkel θ um die z -Achse
- (c) $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ um einen Winkel θ um die x -Achse
- (d) $\mathbf{v} = (1, 0, 3)^T$ um einen Winkel θ um die x -Achse

- 8. (a) Warum wird die Inverse A^{-1} auf diese Weise (Gleichung 21) definiert?
- (b) Beispiel: Eine Rotation in 2-D:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Obwohl es im Allgemeinen sehr schwierig ist, die Inverse zu bestimmen, ist es in diesem Fall einfach. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} .

- (c) Anderes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Auch hier ist die Inverse einfach zu bestimmen. Machen Sie dies.

- (d) Letztes Beispiel: eine "hyperbolische Rotation"²:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Auch hier ist die Inverse einfach zu bestimmen. Machen Sie dies (und bitte beweisen Sie, dass es stimmt!).

- (e) Begründen Sie, aufgrund ihrer Ergebnisse, das Vorzeichen im Matrixelement A_{12} bei der hyperbolischen Rotation³.

9. Beweisen Sie, dass $A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$, wo A und B $N \times N$ Matrizen sind und \mathbf{x} ein N -dimensionaler Vektor. Hinweis: Schreiben Sie dies mit $\sum_{i=1}^N$ etc aus.

¹Eigentlich müssen Vektoren immer senkrecht geschrieben werden (als Spalte), aber es spart Platz im Text wenn es horizontal geschrieben wird (als Zeile). Oft wird es daher als $(1, 2, 3)^T$ (also Transponent) geschrieben.

²Relevant für spezielle Relativitätstheorie.

³Hier gibt es kein Minus-Zeichen, anders als bei der normalen Rotation.