Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2012/13)

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Vektoren

1. Man kann eine Gerade in 3-D mit Hilfe zweier Vektoren eindeutig bestimmen:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{a} + s\,\mathbf{b} \tag{1}$$

   Umgekehrt legt eine gegebene Gerade jedoch nicht 100% fest, wie $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gewählt werden müssen.

   (a) Welche zwei Freiheiten hat man bei dieser Wahl? Mit anderen Worten: Gegeben $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, welche alternative $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}'$ könnte man auch wählen um dieselbe Gerade zu erhalten?

   (b) Was bedeuten diese zwei Freiheiten für die Bedeutung von s?

2. Ein Flugzeug fliegt um genau 9 Uhr in 10 km Flughöhe, 4 km oŝtlich und 3 km nördlich von Heidelberg. Als Koordinatensystem nehmen wir diese drei Zahlen. Der Nullpunkt ist also in Heidelberg. Als Zeitmaß nehmen wir "Stunde seit Mitternacht". Das Flugzeug fliegt in gerader Linie mit einer Geschwindigkeit von 900 km/h in genau nordöstlicher Richtung.

   (a) Gebe einen Ausdruck für den Ortsvektor des Flugzeugs an einem beliebigen Zeitpunkt t.

   (b) Der Pilot misst seine Position jedoch in Luftmeilen (eine Luftmeile ist 1852 Meter) mit Koordinaten-Nullpunkt am Frankfurter Flughafen (70 Kilometer nördlich und 10 Kilometer westlich von Heidelberg). Welchen Ausdruck für die Flugbahn benutzt der Pilot?

3. Ähnlich wie bei Aufgabe 1 oben, kann man auch eine Ebene in 3-D eindeutig parameterisieren. Dafür braucht man drei Vektoren:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a} + u\,\mathbf{b} + v\,\mathbf{c} \tag{2}$$

   (a) Welche 6 Freiheiten hat man bei dieser Wahl? Hinweis: jeder Vektor hat zwei Freiheiten, welche?

   (b) Was muss man bei der Wahl von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ beachten, damit die Ebene auch eindeutig definiert ist? Hinweis: Warum ist die Wahl $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 4, 6)$ nicht gut?

4. Wir bleiben bei der o.g. Ebene. Wir wählen $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$.

   (a) Bestimmen Sie einen Normalvektor $\mathbf{n}$, der Senkrecht auf der Ebene steht. Hinweis: Kreuzprodukt und normalisieren.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ nicht senkrecht auf einander stehen.

(c) Ersetzen Sie $\mathbf{c}$ von einem Vektor $\mathbf{c}'$ der senkrecht auf $\mathbf{b}$ steht, aber zusammen mit $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ noch immer dieselbe Ebene beschreibt.

(d) Steht $\mathbf{c}'$ auch senkrecht auf $\mathbf{n}$, und wenn ja, warum?

5. Man sah in Aufgabe 4, dass man mit Hilfe des Kreuzproduktes, drei Vektoren konstruieren kann, die alle senkrecht auf einander stehen. Es gibt auch ein anderes Verfahren: Das *Gramm-Schmidt Verfahren.* Dieses Verfahren ist eine systematische Weise, aus jeweils zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die nicht senkrecht auf einander stehen, ein senkrechtes Paar $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ zu produzieren. Die Formel für den neuen Vektor $\mathbf{a}'$ lautet:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2} \right) \mathbf{b} \tag{3}$$

Erklären Sie diese Formel auf zwei unabhängige Weisen:

(a) indem Sie einfach beweisen, dass $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}' = 0$

(b) und auf geometrische Weise[1].

[1]Sie können das mit Hilfe der Information in der Zusammenfassung machen, aber eine Literaturstudie (mit Referenz bitte!) ist auch erlaubt.