Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2012/13)

Cornelis Dullemond

Kapitel 2: Integration

1 Das unbestimmte Integral

Integration ist das Umgekehrte von Differenziation:

$$\text{Wenn} \qquad g(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad \text{so ist} \qquad f(x) = \int g(x)dx \tag{1}$$

So wie es hier geschrieben wird, ist das Integral ein *unbestimmtes Integral*. Grund dafür ist, dass es nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Beispiel: $g(x) = 2x$. Das Integral ist dann

$$f(x) = \int 2xdx = x^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2 + 3 \qquad \text{oder} \qquad x^2 - 5 \tag{2}$$

All diese möglichen Funktionen $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 3$, $f(x) = x^2 - 5$ usw. haben alle $2x$ als Ableitung. Man kann also nicht von "*dem Integral*" reden. Meistens schreibt man also:

$$\int 2xdx = x^2 + C \tag{3}$$

wo C die *Integrationskonstante* ist, die man beliebig wählen darf. Man schreibt ein Integral manchmal auch so:

$$\int dx\; g(x) \tag{4}$$

wobei $\int dx$ dann als Operator zu deuten ist. Integration ist ein linearer Operator:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{5}$$

2 Beispiele von "Standardintegrale"

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \qquad \text{für} \qquad p \neq -1 \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \tag{7}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{8}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{9}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \tag{10}$$

3 Bestimmung eines Integrals

Leider gibt es nicht so viele einfach anwendbare Rechenregeln wie bei der Ableitung. Eine Ableitung kann man immer analytisch herleiten, aber ein Integral lässt sich nur unter bestimmten Umständen analytisch bestimmen. Der Trick ist meist:

1. das Integral zuerst auf eine bekannte Form umzuschreiben, und
2. die bekannte Lösung einsetzen.

"Bekannt" bedeutet entweder, dass Sie selbst die Antwort kennen, oder dass Sie es in einer Liste von Standardintegralen finden können. Es gibt dazu Bücher und Webseiten mit Integral-Listen, z.B:
`http://www.integral-table.com/`
Die Kunst der Integration ist es also, das Integral symbolisch zu manipulieren, bis es eine Form hat, die in der Tabelle aufgelisted ist. *Dies ist nicht immer möglich!* In vielen Fällen Benötigt man also numerische Verfahren. Manchmal ist es schon möglich, aber sehr kompliziert. Symbolische Rechenprogramme wie Maple oder Mathematica können dann oft helfen. Aber auch diese Programme geben oft auf. Beispiele:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}+C \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \int \sin(x)\cos(x)dx &= \int \sin(x)\frac{d\sin(x)}{dx}dx = \int \sin(x)d(\sin(x)) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1 \qquad (12) \\ &= -\int \cos(x)\frac{d\cos(x)}{dx}dx = -\int \cos(x)d(\cos(x)) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2 \end{aligned}$$

Hinweis: Man kan sein Ergebnis immer testen, indem man es wieder differenziert!

4 Integral als Oberfläche unter einer Kurve

Ein *bestimmtes Integral* schreibt man folgendermaßen:

$$S = \int_a^b g(x)dx \qquad (13)$$

Es ist eine Zahl, für gegebene Werte von a und b. Man kann es auch als Funktion von a und b betrachten:

$$S(a,b) = \int_a^b g(x)dx \qquad (14)$$

Das Integral $\int_a^b g(x)dx$ ist die Oberfläche unter der Kurve $g(x)$, zwischen $x = a$ und $x = b$. Für $a = b$ gilt $S = 0$. Wenn eine Analytische Form des unbestimmten Integrals existiert,

$$f(x) := \int g(x)dx \qquad (15)$$

so kann man sie nutzen, um den Wert des bestimmten Integrals zu berechnen:

$$\int_a^b g(x)dx = [f(x)]_a^b \equiv f(b) - f(a) \qquad (16)$$

Man sieht, dass eine eventuelle Integrationskonstante in $f(x)$ wegfällt. Das bestimmte Integral hat also keine Integrationskonstante! Man sieht, dass

$$\int_a^b g(x)dx = -\int_b^a g(x)dx \tag{17}$$

Manchmal gibt es Fälle, wobei keine analytische Form des unbestimmten Integrals existiert, aber für besondere Werte von a und b ein analytischer Ausdruck des bestimmten Integrals existiert. Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

Es gibt keine analytische Form von $\int e^{-x^2} dx$, aber das o.g. bestimmte Integral hat den Wert $\sqrt{\pi}$.
Hinweis: Beachten Sie, dass wenn Sie die Integrationsvariable verändern, dass sich dann auch der Integrationsbereich (d.h. a und b) verändert. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x\sin(x^2)dx &= \int_{x=0}^{x=4} x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=4} \sin(x^2)dx^2 & (19)\\
&= \frac{1}{2}\int_{x^2=0}^{x^2=16} \sin(x^2)dx^2 = -\frac{1}{2}\left[\cos(x^2)\right]_{x^2=0}^{x^2=16} & (20)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos(16) - \cos(0)\right) & (21)
\end{aligned}$$

Anderes Beispiel: Der Umfang eines Kreises mit Radius r ist gleich $2\pi r$. Die Oberfläche eines Kreisrings mit Breite $dr \ll r$ ist $2\pi r\, dr$. Also kann man die Formel der Oberfläche eines Kreises mit folgendem Integral ausrechnen:

$$O = \int_0^r 2\pi s\, ds = 2\pi\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^r = 2\pi\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}0^2\right) = \pi r^2 \tag{22}$$

5 Tricks

Man kann ein unbestimmtes Integral $f(x) = \int g(x)dx$ auch wie ein bestimmtes Integral schreiben:

$$\int_a^x g(y)dy = f(x) - f(a) \equiv f(x) + C \qquad \text{mit} \qquad C = -f(a) \tag{23}$$

Manchmal ist *partielle integration* nützlich:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx &= \int \frac{d(f(x)g(x))}{dx}dx - \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx & (24)\\
&= f(a)g(x) + C - \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx & (25)
\end{aligned}$$

zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int \ln(\sin x)\cos(x)dx &= \int \ln(\sin x)\frac{d\sin(x)}{dx}dx && (26)\\
&= \int \frac{d(\ln(\sin x)\sin(x))}{dx}dx - \int \frac{d\ln(\sin x)}{dx}\sin(x)dx && (27)\\
&= \ln(\sin x)\sin(x) + C_1 - \int \frac{d\ln(\sin x)}{d\sin x}\frac{d\sin x}{dx}\sin(x)dx && (28)\\
&= \ln(\sin x)\sin(x) + C_1 - \int \frac{1}{\sin x}\cos(x)\sin(x)dx && (29)\\
&= \ln(\sin x)\sin(x) + C_1 - \int \cos(x)dx && (30)\\
&= \ln(\sin x)\sin(x) + C_1 - \sin(x) - C_2 && (31)\\
&= \ln(\sin x)\sin(x) - \sin(x) + C && (32)
\end{aligned}$$

Man kann für dieses Problem auch eines der Standardintegrale

$$\int \ln(ax)dx = x\ln(ax) - x + C \qquad (33)$$

benutzen (siehe z.B. `http://www.integral-table.com/`). Man schreibt dann:

$$\begin{aligned}
\int \ln(\sin x)\cos(x)dx &= \int \ln(\sin x)\frac{d\sin(x)}{dx}dx && (34)\\
&= \int \ln(\sin x)d(\sin(x)) && (35)\\
&= \sin(x)\ln(\sin(x)) - \sin(x) + C && (36)
\end{aligned}$$