Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2012/13)

Cornelis Dullemond

Kapitel 6: Reihen und Taylorentwicklung

1 Zahlenfolgen

Zahlenfolgen $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ spielen oft eine Rolle in der Mathematik und Physik. Meist handelt es sich um unendliche Zahlenfolgen $\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$. Manchmal ist a_n (für irgendein $n > 0$) definiert als Funktion von a_{n-1}. Manchmal gibt es ein Ausdruck für jeden einzelnen a_n. In der Vorlesung gibt es Beispiele. Der *Grenzwert* der Zahlenfolge ist $\lim_{n\to\infty} a_n$. Nicht jede Zahlenfolge hat ein Grenzwert. Zum Beispiel: die Folge $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ geht gegen Unendlich. Aber die Folge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$ geht gegen Null, und hat also den Grenzwert 0. Eine *geometrische Folge* ist folgendermaßen definiert:

$$a_n = a_0 r^n \tag{1}$$

für irgendein Wert von r. Für $|r| < 1$ ist der Grenzwert 0, aber für $|r| > 1$ gibt es keinen Grenzwert. Ein Beispiel einer besonderen Folge:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{und es gilt, dass} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e \tag{2}$$

Ein Beispiel einer *chaotischen Folge*:

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) \tag{3}$$

mit $x_0 = 0.5$ und $0 < a < 4$. Diese Folge, die sich *logistische Folge* nennt, verhält sich extrem kompliziert, und ist eine der Hauptbeispiele der *Chaostheorie*.

2 Reihen

Eine Reihe ist die Summe einer Folge:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{4}$$

Die *Partialsumme* oder *Teilsumme* S_n ist folgendermaßen definiert:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \tag{5}$$

Der Grenzwert

$$S \equiv \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{6}$$

ist nicht immer definiert. Wenn er jedoch existiert, so nennt man diesen Wert die Summe der unendlichen Reihe. Eine *geometrische Reihe* ist folgendermaßen definiert:

$$a_0(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots) \tag{7}$$

Die Partialsumme ist:

$$S_n = a_0 \sum_{i=0}^{n-1} r^i \tag{8}$$

Ohne Beweis gilt:

$$S_n = a_0 \sum_{i=0}^{n-1} r^i = a_0 \frac{1 - r^n}{1 - r} \tag{9}$$

Daraus folgt, dass für $|r| < 1$ der Grenzwert der geometrischen Reihe

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a_0}{1 - r} \tag{10}$$

ist.

3 Funktionenreihen, Potenzreihen

Bis jetzt haben wir Folgen und Reihen mit konstanten Gliedern betrachtet. Nun betrachten wir Reihen dessen Glieder Funktionen sind:

$$a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{11}$$

Das einfachste Beispiel ist die *Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{12}$$

Die Funktionen sind Potenzen $f_n(x) = x^n$. Dieses Beispiel spielt die Hauptrolle bei der *Taylorentwicklung* (siehe unten). Aber ein anderes Beispiel ist die *Fourierreihe*:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{13}$$

was in der *Fourieranalyse* die Hauptrolle spielt. Die Fourieranalyse werden wir allerdings erst später behandeln. Es gibt noch viele andere Arten von Funktionenreihen der man in der Physik oft begegnet, aber auch die behandeln wir später.

4 Die Taylorentwicklung

Man kann für eine Funktion $f(x)$ eine unendliche Potenzreihe in x aufstellen, die die Funktion in der Nähe von $x = 0$ gut beschreibt:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f''''(0)x^4 + \cdots \tag{14}$$

oder formal:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \tag{15}$$

Dies ist die *Taylorreihe* oder *Taylor-Entwicklung* der Funktion $f(x)$ um $x = 0$. Man kann dies auch um einen anderen, beliebigen Wert x_0 entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!} f''''(x_0)(x-x_0)^4 + \cdots \tag{16}$$

oder formal:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \tag{17}$$

Wenn man nah genug an $x = x_0$ ist, dann werden die höheren Termen immer kleiner, und können ab eine bestimmten Term vernachlässigt werden. So eine Vernachlässigung, oder Annäherung, schreibt man z.B. so:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3) \tag{18}$$

oder formal:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \mathcal{O}((x - x_0)^{m+1}) \tag{19}$$

Das Symbol $\mathcal{O}((x - x_0)^{m+1})$ steht für alle vernachlässigten Termen der Ordnung $m + 1$ und höher. Beispiele:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + \mathcal{O}(x^7) = x + \mathcal{O}(x^3) \tag{20}$$

$$\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \mathcal{O}(x^6) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(x^4) \tag{21}$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass die Taylor-Entwicklung nicht garantiert convergiert. Es konvergiert nur innerhalb eines Bereichs um $x = x_0$. Dies wird der *Konvergenzradius* r genannt:

$$|x - x_0| < r \tag{22}$$

Der Konvergenzradius ist nicht immer leicht zu bestimmen. Aber ein Beispiel zeigt, was schief gehen kann. Nehmen wir die Taylorreihe von $\sin(x)$ um $x = 0$ (siehe oben). Wenn wir $x = 0.1$ nehmen, dann ist der zweite Term $-x^3/6 = -0.00016667$, und der dritte ist $x^5/120 = 8 \times 10^{-8}$. In der Tat: die Terme werden immer kleiner, und die Reihe konvergiert. Wenn man nicht extrem genau rechnen will, kann man also ruhig alle höhere Ordnung Termen vernachlässigen. Nehmen wir aber $x = 10$, dann ist der erste term $x = 10$, der zweite $-x^3/6 = -166.7$, der dritte $x^5/120 = 833.3$. Die Reihe konvergiert offensichtlich nicht. Weitere Beispiele:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{23}$$

mit Konvergenzradius $r = \infty$ oder

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \tag{24}$$

mit Konvergenzradius $r = 1$.