Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2012/13)

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Vektoren

1 Koordinatensysteme

Vektoren sind Objekte in einem mehrdimensionalen Raum. Bevor wir sie allerdings quantifizieren können, müssen wir zuerst den Raum kartografieren. Das heisst, wir müssen ein Koordinatensystem (x, y, z) anlegen. Beispiel: In unserem Seminarraum kann man z.B. die x-Koordinate horizontal entlang der Tafel legen, die y-Koordinate horizontal, aber senkrecht auf der Tafel, und die z-Koordinate vertikal. Als Nullpunkt $(0, 0, 0)$ kann man z.B. vorne-rechts-unten nehmen, und als Maßeinheit 1 Meter. Es ist wichtig, dass wir die drei Koordinaten-Richtungen senkrecht auf einander wählen. Ab jetzt kann man jeden beliebigen Punkt P im Raum mit drei Zahlen identifizieren: (x, y, z). Wichtig: diese Identifikation ist also abhängig vom gewählten Koordinatensystem! Wenn man den Nullpunkt $(0, 0, 0)$ des Koordinatensystems um 2 Meter in positiver x-Richtung verschieben würde, so wird Punkt (x, y, z) im neuen Koordinatensystem: $(x - 2, y, z)$. Wenn man Koordinaten-unabhängig über einen gewissen Punkt reden will, schreibt man dies mit Großbuchstaben: P. In dem Seminarraum sitzen Sie an dem Punkt P; die dazugehörenden Koordinaten sind z.B. $(3, 3, 0)$ in dem ersten o.g. Koordinatensystem, aber, wenn wir das um zwei Meter verschobene Koordinatensystem anwenden, sind die Koordinaten von Punkt P $(1, 3, 0)$.

2 Vektoren

Ein Vektor ist ein "Pfeil" der eine Richtung und eine Länge hat. Es wird oft mit Fettschrift **a** geschrieben, oder mit einem Pfeil oben drauf: $\vec{a}$. Ein Vektor kann man, in dem o.g. Koordinatensystem, mit drei Zahlen (u, v, w) beschreiben. Auch dies ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig. Aber die Zahlen (u, v, w) eines Vektors ändern sich nicht durch eine bloße Verschiebung des Koordinatensystems. In dieser Hinsicht unterscheidet sich ein Vektor **a** von einem Punkt im Raum P. Nur wenn man die x-, y- und/oder z-Koordinaten in andere Richtungen legt, oder wenn man von Meter auf Zentimeter als Maßeinheit über geht, nur dann ändern sich die Zahlen (u, v, w) der Vektoren wie auch die der Punkte im Raum (x, y, z). Wir kommen später noch auf solche Koordinaten-Transformationen zurück. Jetzt aber legen wir das Koordinatensystem fest, und fangen an zu rechnen. Oft werden Vektoren vertikal geschrieben:

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{1}$$

Man kann die Länge (den Betrag) des Vektors folgendermaßen bestimmen:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{2}$$

Wenn ein Vektor per Definition den Betrag 1 hat, so ist es ein *Einheitsvektor* oder *Richtungsvektor*. Oft werden solche Richtungsvektoren mit dem Buchstaben $\mathbf{n}$ geschrieben, oder, wenn es mehrere Richtungsvektoren gibt, mit dem $\hat{}$-Symbol: $\hat{\mathbf{x}}$. Man kann aus einem beliebigen Vektor $\mathbf{a}$ einen Richtungsvektor machen: $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/||\mathbf{a}||$, allerdings nur dann, wenn $||\mathbf{a}|| > 0$.

Man kann die Länge eines Vektors beliebig skalieren:

$$5\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u \\ 5v \\ 5w \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad -\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ -w \end{pmatrix} \tag{3}$$

Man kann zwei Vektoren $\mathbf{a} \equiv (u, v, w)$ und $\mathbf{b} \equiv (p, q, r)$ addieren, oder subtrahieren, z.B.:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 5p \\ v - 5q \\ w - 5r \end{pmatrix} \tag{4}$$

Oft werden Punkte im Raum wie Vektoren behandelt, obwohl sie, wie oben schon beschrieben, keine richtigen Vektoren sind. Wir nennen Sie “Ortsvektoren”, um sie von richtigen Vektoren zu unterscheiden. Wenn wir aber zwei solcher Ortsvektoren $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ und $Q \equiv (x_2, y_2, z_2)$ haben, so ist

$$\mathbf{a} \equiv Q - P \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ein richtiger Vektor, dessen Betrag die Distanz zwischen P und Q ist.

3 Inneres Produkt (Skalarprodukt)

Vektoren kann man nicht einfach multiplizieren. Aber es gibt zwei Definitionen von “Produkten” die sehr oft benutzt werden. Einer ist das innere Produkt. Wenn wir es aus zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ bilden, so erhält man:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{6}$$

Das innere Produkt ist also ein Skalar! Die Bedeutung dieses Skalars ist (siehe Lang und Pucker für mehr Einzelheiten):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,\cos\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) && (7) \\ &= ||\mathbf{a}|| \cdot (\text{Länge der Projektion von } \mathbf{b} \text{ auf } \mathbf{a}) && (8) \\ &= ||\mathbf{b}|| \cdot (\text{Länge der Projektion von } \mathbf{a} \text{ auf } \mathbf{b}) && (9) \end{aligned}$$

Für zwei Einheitsvektoren $\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$ gilt also:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos\theta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \text{Länge der Projektion von } \mathbf{m} \text{ auf } \mathbf{n} \text{ oder äquiv. } \mathbf{n} \text{ auf } \mathbf{m} \tag{10}$$

Man kann das innere Produkt auch als Definition der Länge eines Vektors $\mathbf{a}$ benutzen:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \tag{11}$$

Und man kann das innere Produkt benutzen, um fest zu stellen, ob zwei Vektoren senkrecht auf einander stehen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{a} \text{ und } \mathbf{b} \text{ stehen senkrecht auf einander} \tag{12}$$

4 Äußeres Produkt (Kreuzprodukt)

Die andere mögliche Multiplikation zweier Vektoren ist das äußere Produkt. Dies ergibt einen neuen Vektor:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{13}$$

Es wird folgendermaßen definiert[1]:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{14}$$

und es gilt:

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\ \sin\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{15}$$

Man sieht, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, und dass $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Der Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *steht senkrecht auf der Ebene die von* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *aufgespannt wird!* Die Länge dieses Vektors ist gleich die Oberfläche des Parallellograms das von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannt wird. Die Richtung dieses Vektors kann man mit der Rechte-Hand-Regel finden. Des weiteren kann man das äußere Produkt benutzen, um fest zu stellen, ob zwei *nicht-null*-Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ parallel sind:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{a} \text{ und } \mathbf{b} \text{ sind parallel} \tag{16}$$

Rechenregel mit drei Vektoren:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \tag{17}$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \tag{18}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \tag{19}$$

5 Vektoren als Werkzeug für die Analyse von Kurven

Stellen Sie sich vor, wir studieren die Flugkurve eines Flugzeugs. Dazu bestimmen wir den Ortsvektor $\mathbf{r}$ als Funktion der Zeit t:

$$\mathbf{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{20}$$

An jedem Zeitpunkt kann man die Richtung und Geschwindigkeit des Flugzeugs in Form des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}(t)$ ("v" für "velocity") definieren[2]:

$$\mathbf{v}(t) \equiv \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \tag{21}$$

[1] Für das richtige Vorzeichen dieses Produkts, muss man eine weitere Bedingung an das Koordinatensystem stellen: Die x-, y- und z-Koordinaten-Richtungen müssen der Rechte-Hand-Regel folgen: x=Daumen, y=Zeigefinger und z=Ringfinger.

[2] Die Wahl von u, v und w für die drei Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist ziemlich willkürlich, wird aber oft so gewählt.

Man kann $\mathbf{v}(t)$ mit Hilfe der folgenden Ableitung bestimmen:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{22}$$

wo $\dot{x} \equiv dx(t)/dt$ die übliche Schreibweise einer Zeitableitung ist. Die Ableitung eines Ortsvektors (oder eines Vektors) ist also die Ableitung der jeweiligen Komponenten. Obwohl $\mathbf{r}$ ein Ortsvektor ist, ist $\mathbf{v}$ ein richtiger Vektor. Man kann jetzt noch weiter gehen, und den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ ("a" von acceleration):

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} \tag{23}$$

oder äquivalent:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t) \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{24}$$

definieren. In der klassischen Mechanik wird mit diesem Werkzeug die *Bewegungsgleichung* des Flugzeugs als *Differenzialgleichung zweiter Ordnung* für $\mathbf{r}(t)$ geschrieben:

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{25}$$

wo m die Masse des Flugzeugs, und $\mathbf{f}(t)$ die netto Kraft, die auf das Flugzeug wirkt ist. Man kann dies auch äquivalent als zwei *gekoppelte Differenzialgleichungen erster Ordnung* für das Paar $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ sehen:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) \tag{26}$$

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{27}$$