Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)

Cornelis Dullemond

Kapitel 7: Reihen und Taylorentwicklung

1. Bestimme den Wert der folgenden Reihen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{3}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}\cdot\frac{3}{4}+\cdots \tag{1}$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots \tag{2}$$

2. Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis $\mathcal{O}(x^3)$ der folgenden Funktionen um $x=0$:
   (a) $f(x)=\sqrt{1+x}$ (b) $f(x)=\sinh x$ (c) $f(x)=e^{x/2}$

3. Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis $\mathcal{O}((x-x_0)^3)$ der folgenden Funktionen um $x_0=1$:
   (a) $f(x)=\sqrt{x}$ (b) $f(x)=\cos(\pi x)$

4. Benutzen Sie eine Taylorentwicklung um folgenden Limiten auszuwerten:

$$(a) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\cos(\pi x/2)} \qquad\qquad (d) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1}$$

5. L'Hospital's Regel besagt, dass, wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ beide gegen Null gehen für $x\to x_0$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \tag{3}$$

   wenn $g'(x_0)\neq 0$. Beweisen Sie dies mit Hilfe von Taylor-Entwicklungen.