Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)

Cornelis Dullemond

Kapitel 1: Differenziation

1 Funktionen

Eine Funktion ist eine virtuelle “Maschine” die aus ihrem Argument (oder aus ihren Argumenten) einen eindeutigen Wert produziert. Nennen wir unsere Funktion f, so können wir sie zum Beispiel folgendermaßen definieren:

$$f(.) \quad : \qquad f(x) = x^2 \tag{1}$$

In diesem Beispiel wird zu dem Argument x der Wert x^2 zugeordnet. Man kann es auch definieren wie $f(t) = t^2$, d.h. den Namen des Arguments darf man frei wählen. Den Namen der Funktion hat man allerdings mit der o.g. Definition festgelegt. Man kann auch Funktionen mehrerer Variablen definieren, z.B.

$$f(.,.) \quad : \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 \tag{2}$$

Ab jetzt werden wir die Schreibweise $f(.)$ oder $f(.,.)$ einfach weglassen. Oft werden Funktionen auch einfach mit den Zusammenhängen zweier Variablen definiert, z.B.:

$$y = x^2 \tag{3}$$

wobei es genauer gewesen wäre sie wie $y(x) = x^2$ zu schreiben.

2 Ableitung: Definition

Die Ableitung ist die Steigung einer Funktion. Sie wird folgendermaßen definiert:

$$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Die Ableitung $f'(x)$ ist eine Funktion, wie auch $f(x)$. Sie ist also an jeder Stelle (d.h. für jeden Wert x) definiert, und kann an jeder Stelle einen anderen Wert haben. Eine andere Schreibweise für die Ableitung ist:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \tag{5}$$

Oder, wenn man salopp $y = x^2$ schreibt, so schreibt man

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{6}$$

Wenn die Funktion eine komplizierte Struktur hat, wird $\frac{d}{dx}$ auch oft als *Operator* geschrieben:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}\right) \tag{7}$$

Die Prozedur der Bestimmung der Ableitung heißt *Differenziation*. Nicht alle Funktionen sind differenzierbar. Wenn eine Funktion einen Sprung hat, dann ist sie an der Stelle nicht differenzierbar.

Eine etwas abstrakte Schreibweise stellt das *totale Differential* da. Nehmen wir z.B. die Funktion $f(x) = x^2$, so ist das totale Differential:

$$df = d(f(x)) = d(x^2) = 2xdx \tag{8}$$

Wenn man diesen Ausdruck durch das Differential dx teilt, so erhält man:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{2xdx}{dx} = 2x\frac{dx}{dx} = 2x \tag{9}$$

wie erwartet.

3 Ableitung: Standard Formel

Folgende Funktionen haben standard Ableitungen, die man sich merken sollte:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^p}{dx} &= px^{p-1} && (10)\\
\frac{de^x}{dx} &= e^x && (11)\\
\frac{d\ln(x)}{dx} &= \frac{1}{x} && (12)\\
\frac{d\sin(x)}{dx} &= \cos(x) && (13)\\
\frac{d\cos(x)}{dx} &= -\sin(x) && (14)\\
\frac{d\sinh(x)}{dx} &= \cosh(x) && (15)\\
\frac{d\cosh(x)}{dx} &= \sinh(x) && (16)\\
& && (17)
\end{aligned}$$

4 Ableitung: Rechenregel

Ableitung einer Summe:

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} \tag{18}$$

Produkt:

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx} \tag{19}$$

Kettenregel (Substitutionsregel):

$$\frac{d(f(g(x))}{dx} = \frac{d(f(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} \tag{20}$$

Hier sieht man, dass es wichtig ist, zu fragen, nach was eine Funktion differenziert wird:

$$\frac{d(f(g(x))}{dg(x)} = \frac{df(u)}{du} \quad \text{mit} \quad u := g(x) \tag{21}$$

Beispiel

$$\frac{d\sqrt{1+x^2}}{dx} = \frac{d\sqrt{1+x^2}}{d(1+x^2)} \frac{d(1+x^2)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{22}$$

5 Ableitung: Tricks mit dem totalen Differenzial

Mit der freien Anwendung von dem Prinzip des totalen Differenzials kann man interessante Sachen machen. Zum Beispiel, was ist die Ableitung von:

$$y = \arcsin x \tag{23}$$

Indem man dies invertiert erhält man $x = \sin y$. Man kann dann dx/dy ausrechnen

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - (\sin y)^2} = \sqrt{1 - x^2} \tag{24}$$

Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1} \tag{25}$$

und also gilt für den Fall $y = \arcsin x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{26}$$

6 Höhere Ableitungen

Eine Differenziation kann man mehrmals ausführen. Zum Beispiel, die zweite Ableitung schreibt man folgendermaßen:

$$f''(x) \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \tag{27}$$

Es ist wichtig, zu verstehen, dass

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \neq \frac{(df(x))^2}{dx^2} \tag{28}$$

Es handelt sich nämlich um den d^2 Differenzialoperator, was bedeutet, dass das d zwei mal angewendet wird. Die zweite Ableitung von $f(x)$ sagt aus, wie sehr die Funktion $f(x)$ gekrümmt ist. Man kann den Differenzialoperator beliebig oft anwenden:

$$f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \tag{29}$$

das n steht hier in Klammern, damit es klar ist, dass es sich um die n-fache Ableitung handelt, nicht also die n-Potenz.