Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)

Cornelis Dullemond

Kapitel 6: Oszillationen mit Dämpfung

1 Harmonischer Oszillator mit komplexen Lösungen

Wir hatten schon folgende Gleichung für einen oszillierenden Körper gesehen und gelöst:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1}$$

wo $x = x(t)$ eine Funktion von der Zeit ist, und $\ddot{x} = d^2x(t)/dt^2$ die zweite Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit. Die Konstanten sind die Masse des Körpers m und die Federkonstante k. Meistens wird diese Gleichung so geschrieben, dass alle Termen links stehen:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2}$$

Wir hatten schon festgestellt, dass die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{3}$$

ist, mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

und A und B willkürliche Konstanten. Man kann die Gleichung auch mit komplexen Zahlen lösen:

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \tag{5}$$

mit C und D willkürliche *komplexe* Konstanten. Die physikalische Interpretation dieser Lösung kann man auf zwei unterschiedlichen Weisen machen:

1. Entweder man fordert, dass $x(t)$ reell ist, und damit, dass $D = C^*$. Die Lösung ist damit $x(t) = Ce^{i\omega t} + C^*e^{-i\omega t}$.

2. Oder man nimmt $D = 0$ und man betrachtet, für die physikalische Interpretation, nur den reellen Teil der Lösung.

Beide Methoden sind äquivalent. Das einfachste ist deshalb die zweite Methode, in dem wir nur die Lösung

$$x(t) = Ce^{i\omega t} \tag{6}$$

betrachten. Es gibt jetzt nur noch eine Konstante (C), aber die ist komplex, und besteht somit effektiv aus zwei reelle Konstanten (sprich: $\mathrm{Re}(C)$ und $\mathrm{Im}(C)$), genauso viele wie bei Gl. (3). Das ist gut so: somit sind Gl. (3) und Gl. (6) tatsächlich äquivalent.

Der Grund warum Physiker meistens die komplexe Lösungen benutzen anstatt die sinus und cosinus-Lösungen ist zweierlei:

- Wir müssen jetzt nur noch eine Funktion in die Gleichung einsetzen ($e^{i\omega t}$) anstatt zwei ($\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$). Ausserdem sind die zwei Konstanten (A und B) in eine komplexe Konstante zusammengefasst (C). Und schliesslich lässt sich eine Verschiebung der Oszillation in der Zeit nun mit einen einfachen Phasenverschiebung darstellen, indem man C durch $Ce^{-i\phi}$ ersetzt.

- Mit der komplexen Darstellung ist es einfacher um auch kompliziertere lineare Differenzialgleichungen zu lösen, wie wir in dem nächsten Abschnitt sehen werden.

2 Harmonischer Oszillator mit Dämpfung

In den meisten realistischen Fällen gibt es immer ein bisschen Reibung (zum Beispiel Reibung mit der Luft). Reibung kann ein sehr komplizierter Prozess sein. Die einfachste Art Reibung ist die Kraft, die sich linear mit der Geschwindigkeit verhält: je schneller das Objekt, desto größer die Reibungskraft. Diese Kraft f_{reibung} zeigt immer in die entgegengesetzte Richtung zur Geschwindigkeit:

$$f_{\text{reibung}} = -\Gamma\dot{x} \tag{7}$$

wo $\dot{x}$ die Geschwindigkeit ist, und Γ die Reibungskonstante. Die Bewegungsgleichung ist nun:

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + kx = 0 \tag{8}$$

(überzeugen Sie sich!).

2.1 Grenzfälle

Lassen Sie uns diese Gleichung erst mal genauer analysieren, bevor wir die allgemeine Lösung suchen. Wir tun dies, indem wir schauen, welche Lösungen wir erhalten, wenn wir eine der drei Termen herausnehmen. Zum Beispiel: Was ist, wenn $\Gamma = 0$? Wir erhalten dann natürlich wieder die Gleichung für den harmonischen Oszillator (Gl. 2) zurück, und die Lösung kennen wir (Gl. 6). Aber was, wenn stattdessen (!) $m = 0$ (oder nahezu null)? Dann wird die Differenzialgleichung

$$\Gamma\dot{x} + kx = 0 \tag{9}$$

Die Lösung kennen wir auch:

$$x(t) = Ce^{-(k/\Gamma)t} \tag{10}$$

Also beschreibt dies eine exponentielle Relaxation von x gegen $x = 0$. Je größer die Reibungskonstante Γ, desto länger dauert es, bis $x(t)$ bis $x \to 0$ relaxiert ist (Achtung: Die Relaxation dauert natürlich unendlich lange, da $x = 0$ nie erreicht wird, nur immer weiter angenähert wird). Schließlich, was passiert, wenn stattdessen $k = 0$? Dann erhalten wir die Differenzialgleichung

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} = 0 \tag{11}$$

Die Lösung kennen wir auch, wenn wir für $\dot{x}(t) \to y(t)$ einsetzen: $m\dot{y} + \Gamma y = 0$ mit Lösung $y(t) = Ce^{-(\Gamma/m)t}$. Dies bedeutet (wenn wir wieder $y(t) \to \dot{x}(t)$ zurück einsetzen):

$$\dot{x}(t) = Ce^{-(\Gamma/m)t} \tag{12}$$

Diese Gleichung können wir direkt integrieren:

$$x(t) = \int Ce^{-(\Gamma/m)t} dt = C' e^{-(\Gamma/m)t} + D \tag{13}$$

wo $C' = Cm/\Gamma$ und D eine Integrationskonstante. Diese Lösung repräsentiert eine sich bewegende Masse die durch Reibung zum Stillstand kommt. Je größer Γ, desto schneller bremst die Bewegung ab.

2.2 Allgemeine Lösung

Wenn aber weder m, noch Γ, noch k null sind, so werden wir gezwungen die ganze Gleichung (8) zu lösen. Als Ansatz nehmen wir eine Lösung der Art

$$x(t) = Ce^{i\omega t} \tag{14}$$

wo wir allerdings diesmal ω erlauben *komplex* zu sein. Damit erlauben wir eine Lösung die sowohl oszilliert, als auch exponentiell dämpft. Wir rechnen aus:

$$\dot{x} = i\omega Ce^{i\omega t} \qquad , \qquad \ddot{x} = -\omega^2 Ce^{i\omega t} \tag{15}$$

Wir setzen dies in Gl. (8) ein und erhalten:

$$\left[-\omega^2 m + i\omega\Gamma + k\right] Ce^{i\omega t} = 0 \tag{16}$$

was tatsächlich eine Lösung ist, wenn

$$-\omega^2 m + i\omega\Gamma + k = 0 \tag{17}$$

Wenn wir dies nach ω auflösen ("Mitternachtsformel"), so erhalten wir:

$$\omega = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{-\Gamma^2 + 4mk}}{2m} \tag{18}$$

Hier müssen wir ω als komplexe Zahl sehen.

Lassen Sie uns diese Lösung für ω mal analysieren. Wenn wir $\Gamma \to 0$ nehmen, so erhalten wir $\omega = \pm\sqrt{k/m}$, was tatsächlich die Lösung des harmonischen Oszillators ist. Wenn $m \to 0$ ist es etwas kniffliger. Einer der Lösungen geht gegen $\omega = i\Gamma/m \to +i\infty$, so dass $x \to Ce^{-(\Gamma/m)t} \to 0$. Diese "Lösung" ist also sinnlos. Die andere Lösung wird:

$$\begin{aligned} \omega \to \lim_{m\to 0} \frac{i\Gamma - i\sqrt{\Gamma^2 - 4mk}}{2m} &= i\Gamma \lim_{m\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4mk/\Gamma^2}}{2m} \\ = i\Gamma \lim_{m\to 0} \frac{1 - (1 - 2mk/\Gamma^2)}{2m} &= i\Gamma \frac{k}{\Gamma^2} = i\frac{k}{\Gamma} \end{aligned} \tag{19}$$

Damit wird die Lösung:

$$x(t) = Ce^{i\omega t} = Ce^{-(k/\Gamma)t} \tag{20}$$

genauso wie wir dies schon in Abschnitt 2.1 hergeiletet haben. Schließlich, wenn $k \to 0$, so erhalten wir

$$\omega = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{-\Gamma^2}}{2m} = \frac{i\Gamma \pm i\Gamma}{2m} = i\frac{\Gamma}{2m}(1 \pm 1) \tag{21}$$

Dies ist entweder $\omega = 0$, was x =konstant bedeutet, oder $x(t) = Ce^{-(\Gamma/m)t}$. Da beide Lösungen möglich sind, und auch eine beliebige Summe der beiden Lösungen, so erhalten wir als allgemeine Lösung für den Fall $k = 0$:

$$x(t) = Ce^{-(\Gamma/m)t} + D \tag{22}$$

wo D eine konstante ist. Und dies ist tatsächlich die Lösung, die wir aus Abschnitt 2.1 kennen. Wir können also sicher sein, dass unsere Formel (18) das richtige Verhalten hat für die Grenzfälle.

Aber Gleichung (18) gilt nun auch für den allgemeinen Fall wo m, Γ und k nicht null sind. Die Lösung

$$x(t) = Ce^{i\omega_{(+)}t} + De^{i\omega_{(-)}t} \qquad \text{mit} \qquad \omega_{(\pm)} = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{-\Gamma^2 + 4mk}}{2m} \tag{23}$$

ist nun die allgemeine Lösung für den gedämpften harmonischen Oszillator.

Dieses Beispiel zeigt die Kraft der komplexen Algebra. Wenn wir diese Lösungen hätten herleiten müssen mit sinus und cosinus-Funktionen, hätte das zwar letztendlich auch geklappt, aber es hätte erheblich mehr Arbeit gekostet.