Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2011)

Cornelis Dullemond

Kapitel 4: Krummlinige Koordinatensysteme

1. Gegeben seien die folgenden Vektorfelder in cartesischen Koordinaten. Bitte geben Sie sie in der zylindrischen Tangentialbasis $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ an:

$$\text{(a)} \qquad \mathbf{v}(x,y,z) = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z \tag{1}$$

$$\text{(b)} \qquad \mathbf{v}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{e}_y \tag{2}$$

2. Gegeben seien die folgenden Vektorfelder in cartesischen Koordinaten. Bitte geben Sie sie in der sphärischen Tangentialbasis $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ an:

$$\text{(a)} \qquad \mathbf{v}(x,y,z) = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \tag{3}$$

$$\text{(b)} \qquad \mathbf{v}(x,y,z) = -y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y \tag{4}$$

3. Gegeben seien die folgenden Vektorfelder in sphärischen Koordinaten. Bitte geben Sie sie in der cartesischen Tangentialbasis $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$ an:

$$\text{(a)} \qquad \mathbf{v}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\,\mathbf{e}_r \tag{5}$$

$$\text{(b)} \qquad \mathbf{v}(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi \tag{6}$$

4. In sphärischen Koordinaten wird der Gradient eines Skalarfeldes laut dem Skript gegeben von:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi \tag{7}$$

   Argumentieren Sie woher die Faktoren $1/r$ und $1/r\sin\theta$ in dem zweiten bzw. dritten Term kommen.

5. Ein Stern strahlt Licht in allen Richtungen gleichermaßen stark aus. Der Licht-Flussvektor $\mathbf{F}(r,\theta,\phi)$ zeigt dementsprechend immer nach aussen. Da das Licht ausserhalb vom Stern weder absorbiert, noch irgendwie verstärkt wird, muss gelten, dass die Divergenz des Flusses Null ist, also $\nabla\cdot\mathbf{F}(r,\theta,\phi)$. Zeigen Sie anhand der Formel für die Divergenz in sphärischen Koordinaten, dass damit gilt, dass $F_r \propto 1/r^2$.

6. Zwei Vorlesungen zurück haben wir mit Hilfe des Stokesschen Satzes hergeleitet, dass das Magnetfeld rundum ein Stromdraht proportional zu $1/r$ ist (wo r der zylindrische Radius ist). Leiten Sie diese Proportionalität nun her mit Hilfe der Formel für $\nabla\times\mathbf{B}$ in zylindrischen Koordinaten.

7. Ein Vektorfeld sei, in cartesischen Koordinaten, gegeben von

$$\mathbf{v}(x, y, z) = -y\,\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y \tag{8}$$

In zylindrischen Koordinaten wird dasselbe Feld folgendermaßen geschrieben:

$$\mathbf{v}(r, \phi, z) = r\,\mathbf{e}_\phi \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass wenn man $\nabla \times \mathbf{v}$ in cartesischen Koordinaten berechnet (also mit Gl. 8) dasselbe heraus kommt als wenn man es in zylindrischen Koordinaten berechnet (mit Gl. 9 und der Formelsammlung aus dem Skript).