

# Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2011)

Cornelis Dullemond  
Kapitel 3: Vektorfelder II

## 1. Rotation von einem Gradienten

Beweisen Sie, dass für ein beliebiges Skalarfeld  $\phi(x, y, z)$  gilt, dass

$$\nabla \times \nabla \phi(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

## 2. Divergenz einer Rotation

Beweisen Sie, dass für ein beliebiges Vektorfeld  $\mathbf{a}(x, y, z)$  gilt, dass

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

## 3. Potenzial-Vektorfeld

Ein Feld  $\mathbf{v}(x, y, z)$  sei gegeben durch

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z) \quad (3)$$

wo  $\phi(x, y, z)$  ein Skalarfeld ist. Beweisen Sie, dass

$$\oint_C \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4)$$

wo  $C$  eine willkürliche geschlossene Kurve ist.

## 4. Vektorpotenzial

Ein Feld  $\mathbf{b}(x, y, z)$  sei gegeben durch

$$\mathbf{b}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) \quad (5)$$

wo  $\mathbf{a}(x, y, z)$  ein Vektorfeld ist. Beweisen Sie, dass

$$\oint_{\partial V} \mathbf{b}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (6)$$

wo  $\partial V$  eine beliebige geschlossene Oberfläche ist.

## 5. Zusammenhang zwischen Gauß und Stokes

Für ein willkürliches Vektorfeld  $\mathbf{a}(x, y, z)$  gilt, dass

$$\int_{\partial V} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (7)$$

wo  $\partial V$  eine beliebige geschlossene Oberfläche ist.

- (a) Beweisen Sie dies mit dem Gaußschen Satz
- (b) Beweisen Sie dies mit dem Stokesschen Satz

## 6. Verschiebungsstrom

In Kapitel 2 wurden die Maxwell-Gleichungen für Elektrostatik und Magnetostatik eingeführt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad (11)$$

Diese sind allerdings für Zeit-abhängige Systeme unvollständig. In dieser Aufgabe werden wir an Hand eines Beispiels beweisen, dass Gleichung 11 einen weiteren Term haben muss, der “Verschiebungsstrom-Term” genannt wird. Man stelle sich eine Kugelschale  $\partial V$  mit Radius  $R$  vor. Durch die Schale strömt ein elektrischer Strom mit Stromdichte  $J$  nach innen.  $J$  ist überall auf der Schale gleich groß (doch zeigt immer nach innen). Die Ladung in dem Volumen  $V$  wird also mit der Zeit größer:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 4\pi R^2 J \quad (12)$$

wo  $Q = \int_V \rho dV$ .

- (a) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel Gleichung 11 nicht stimmen *kann*. Hinweis: Benutzen Sie, was Sie in den vorigen Aufgaben gelernt haben.
- (b) Berechnen Sie  $\partial\mathbf{E}/\partial t$  auf die Schale. Hinweis: Wie üblich, benutzen Sie Symmetrie-Argumente.
- (c) Zeigen Sie, dass wenn wir Gleichung 11 auf folgende Weise ergänzen:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (13)$$

dass dann die Gleichung für dieses Beispiel wieder konsistent ist.