Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2011)

Cornelis Dullemond

Kapitel 5: Wellen

1. **Zwei gekoppelte Schwingkörper**
   Wir betrachten das System zweier gekoppelten Körper, so wie die in der Vorlesung und Zusammenfassung besprochen wurden. Wir haben gesehen, dass es zwei Lösungen gab: eine schnelle und eine langsame. Jetzt werden wir sehen, dass wir beliebige Lösungen aus einer Summe dieser zwei Lösungen zusammenbauen können. An Zeitpunkt $t = 0$ setzen wir Körper 1 an der Stelle $y_1 = 1$ und Körper 2 an der Stelle $y_2 = 0$. Beide Körper haben an dem Zeitpunkt Geschwindigkeit $dy_1/dt = dy_2/dt = 0$.

   (a) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen mit diesen Anfangsbedingungen.

2. **Endlose Kette gekoppelter Körper mit extra Feder**
   Betrachten Sie die endlose Kette von Körper aus der Zusammenfassung. Fügen Sie extra Federn hinzu, wie in Fig. 1 dargestellt. Die Federkonstante für die neuen Federn nennen wir g.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Körper auf

   (b) Ähnlich wie in der Vorlesung, stellen Sie die kontinuierliche Version der Gleichung auf. Auch hier wird es dann eine "Federkonstante pro Länge" geben für die neue Feder. Nennen wir dies φ.

   (c) Geben Sie die Dispersionsrelation für dieses kontinuierliche System.

3. **Die Geschwindigkeit einer Welle I**
   Wir betrachten die kontinuierliche unendliche Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = W\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

   mit $W > 0$. Wir betrachten eine Wellenlösung der Form

$$\psi(x,t) = Ae^{i\omega t - ikx} \tag{2}$$

   (a) Was ist die Dispersionsrelation?

   (b) Was würde passieren, wenn $W < 0$?

   (c) Wenn $W > 0$, was ist die Wellengeschwindigkeit? Hinweis: Wie schnell bewegt sich der Punkt $x(t)$ wo die Phase der Welle zum Beispiel 0 ist? Dies heißt die *Phasengeschwindigkeit* der Welle.

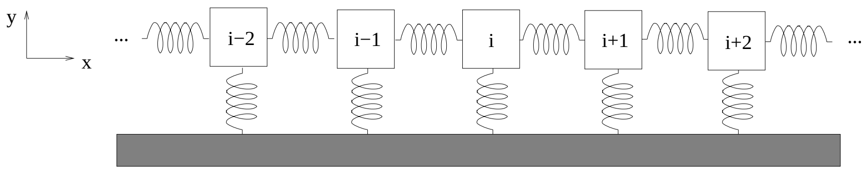

Figure 1: Unendliche Kette schwingender Körper mit extra Feder.

4. **Die Geschwindigkeit einer Welle II**
Wir betrachten die kontinuierliche unendliche Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = W \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - Q\psi(x,t) \tag{3}$$

mit $W > 0$ und $Q > 0$. Wir betrachten wieder eine Wellenlösung der Form Gl. 2.

(a) Was ist die Dispersionsrelation?

(b) Was ist die Bedeutung von Lösungen mit $k = 0$?

(c) Was ist die Wellengeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) für $k \neq 0$?

Für $k \to 0$ geht die Phasengeschwindigkeit gegen ∞. Irgendwas muss schiefgegangen sein, weil es natürlich nicht möglich ist, Information mit unendliche Geschwindigkeit zu transportieren. Wenn wir diese Paradox genauer betrachten würden, würde sich herausstellen, dass die Phasengeschwindigkeit nicht immer die Geschwindigkeit ist, mit dem Information transportiert wird[1]. Es würde zu weit führen dies hier genauer zu diskutieren, aber:

(d) Erkläre in Worten, warum die Phasengeschwindigkeit nach ∞ geht, obwohl offensichtlich kein wirkliches Signal mit dieser Geschwindigkeit transportiert wird.

[1]Die Geschwindigkeit mit dem Information transportiert wird heißt die *Gruppengeschwindigkeit*, und ist $v_{\rm gr} = d\omega/dk$. Wir werden dies aber nicht näher diskutieren.