**Zusammenfassung der Vorlesung**
**Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2011)**

Cornelis Dullemond

# Kapitel 4: Krummlinige Koordinatensysteme

**Warnung:** Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als "Lehrbuch". In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

## 1 Motivation

Wir haben schon mehrmals Kreiskoordinaten und Polarkoordinaten benutzt, sie aber noch nie richtig genau betrachtet. In diesem Kapitel holen wir dies nach.

## 2 Die meistbenutzten krummlinigen Koordinatensysteme

### 2.1 Kreiskoordinaten (2-D)

Die Transformation von Kreiskoordinaten $(r, \phi)$ auf cartesische Koordinaten lautet:

$$x = r\cos\phi \qquad\qquad y = r\sin\phi \tag{1}$$

Die umgekehrte Transformation, von cartesische auf Kreiskoordinaten ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \phi = \mathrm{atan}(y/x) \tag{2}$$

### 2.2 Zylindrische Koordinaten (3-D)

Die Transformation von zylindrischen Koordinaten $(r, \phi, z)$ auf cartesische Koordinaten lautet:

$$x = r\cos\phi \qquad\qquad y = r\sin\phi \qquad\qquad z = z \tag{3}$$

Die umgekehrte Transformation, von cartesische auf zylindrische Koordinaten ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \phi = \mathrm{atan}(y/x) \qquad\qquad z = z \tag{4}$$

### 2.3 Sphärische Koordinaten (3-D)

Die Transformation von sphärischen Koordinaten $(r, \theta, \phi)$ auf cartesische Koordinaten lautet:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad\qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad\qquad z = r\cos\theta \tag{5}$$

Die umgekehrte Transformation, von cartesische auf sphärische Koordinaten ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad\qquad \theta = \mathrm{atan}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \qquad\qquad \phi = \mathrm{atan}(y/x) \tag{6}$$

## 3 Vektorfelder in krummlinigen Koordinatensystemen

Um ein Vektorfeld zu quantifizieren (in Zahlen zu schreiben) braucht man ein lokales lineares Bezugssystem. In cartesischen Koordinaten benutzt man die natürlichen $x$, $y$ und $z$-Richtungen. Das heißt, ein Einheitsvektor der in $x$-Richtung zeigt, wird $(1,0,0)$ geschrieben, usw. Aber wie funktioniert das, wenn die Koordinaten krumm sind? Die $r$-Richtung, zum Beispiel, zeigt ja an verschiedenen Orten in eine andere Richtung. In der Vorlesung wird gezeigt, wie man mit "tangentialen Basissystemen" dieses Problem löst. So kann man in zylindrischen Koordinaten ein Vektorfeld $\mathbf{v}(r,\phi,z)$ in $r$-, $\phi-$ und $z-$Komponenten zerlegen. Nennen wir die $v_r(r,\phi,z)$, $v_\phi(r,\phi,z)$ und $v_z(r,\phi,z)$. In cartesischen Koordinaten hatten wir aber die Komponenten $v_x(x,y,z)$, $v_y(x,y,z)$ und $v_z(x,y,z)$. Wie können wir zwischen den zwei Koordinatensystemen transformieren? Nehmen wir an, dass wir an einer Stelle $P$ (der in cartesischen Koordinaten von $(x,y,z)$ gegeben wird, und in zylindrischen Koordinaten von $(r,\phi,z)$ gegeben wird) einen Vektor $\mathbf{v}$ haben. Wie hängen die Komponenten $(v_x,v_y,v_z)$ und $(v_r,v_\phi,v_z)$ dieses Vektors zusammen? Die Antwort lautet:

$$v_x = \cos\phi\, v_r - \sin\phi\, v_\phi = \left(\frac{x}{r}\right) v_r - \left(\frac{y}{r}\right) v_\phi \tag{7}$$

$$v_y = \sin\phi\, v_r + \cos\phi\, v_\phi = \left(\frac{y}{r}\right) v_r + \left(\frac{x}{r}\right) v_\phi \tag{8}$$

$$v_z = v_z \tag{9}$$

Dies ist eine *lineare Transformation*, im Gegensatz zu den Transformationen der Koordinaten aus Abschnitt 2. Dies ist so, weil Vektoren lineare Objekten sind.

Ähnlich, aber komplizierter, sieht es mit sphärischen Koordinaten aus:

$$v_x = \sin\theta\cos\phi\, v_r + \cos\theta\cos\phi\, v_\theta - \sin\phi\, v_\phi \tag{10}$$

$$= \left(\frac{x}{r}\right) v_r + \frac{z}{r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, v_\theta - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, v_\phi \tag{11}$$

$$v_y = \sin\theta\sin\phi\, v_r + \cos\theta\sin\phi\, v_\theta + \cos\phi\, v_\phi \tag{12}$$

$$= \left(\frac{y}{r}\right) v_r + \frac{z}{r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, v_\theta + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, v_\phi \tag{13}$$

$$v_z = \cos\theta\, v_r - \sin\theta\, v_\theta \tag{14}$$

$$= \left(\frac{z}{r}\right) v_r - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\, v_\theta \tag{15}$$

## 4 Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinatensystemen

Die Anwendung von Differenzialoperatoren auf Vektoren in krummlinigen Koordinaten ist leider ziemlich kompliziert, und sicherlich nicht einfach her zu leiten (mit manchen Ausnahmen). Trotzdem können sie manchmal wichtig sein. Die Formel findet man in vielen Büchern, wie z.B. Büchern über Elektrodynamik oder ähnliches. Hier listen wir die Formel für manche Operatoren - ohne Beweis. Die müssen sie natürlich *nicht* auswendig lernen! Sollten Sie die in der Klausur benötigen, werden wir sie ihnen vorgeben. In den folgenden Formeln sind $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$, bzw. $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$ für die Einheitsvektoren in den jeweilig tangentialen Richtungen.

## 4.1 Differenzialoperatoren in Zylinderkoordinaten

$$
\begin{aligned}
\nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial r\,A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z \\
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

## 4.2 Differenzialoperatoren in sphärischen Koordinaten

$$
\begin{aligned}
\nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi \\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\phi \\
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&\equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$