Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2011)

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Vektorfelder II

Warnung: Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als "Lehrbuch". In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

1 Motivation

Wir haben Vektorfelder schon im letzten Semester gehabt, und auch im letzten Kapitel wieder verwendet. Es gibt aber noch einige Eigenschaften von Vektorfelder die wir näher betrachten sollten. Darüber geht dieses Kapitel.

2 Potenzialfelder

Man kann aus einem Skalarfeld $\phi(x, y, z)$ auf folgende Weise ein Vektorfeld machen:

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) \tag{1}$$

Man kann jedoch nicht ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{b}(x, y, z)$ in der Form von Gl. 1 schreiben. Ein Vektorfeld $\mathbf{a}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ hat folgende Eigenschaft:

$$\nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

Es hat also "keine Rotation". Im allgemeinen gilt tatsächlich:

$$\nabla \times \nabla\phi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

Beispiel in 2-D: eine Berglandschaft mit Höhen-Verlauf $h(x, y)$. Die Steigung $\mathbf{g}(x, y)$ ist $\mathbf{g}(x, y) = \nabla h(x, y)$. Jetzt machen wir eine Wanderung entlang einem Pfad $x(t)$, $y(t)$. Sei $\mathbf{v}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor entlang des Weges. Die totale Anzahl Höhenmeter die wir gestiegen sind zwischen Anfang $t = 0$ und Ende $t = t_{\mathrm{Ende}}$ der Wanderung ist:

$$\Delta h = \int_0^{t_{\mathrm{Ende}}} \nabla h(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{v}(x(t), y(t))\, dt \tag{4}$$

oder anders geschrieben:

$$\Delta h = \int_P^Q \nabla h(x(t), y(t)) \cdot d\mathbf{s} = h(Q) - h(P) \tag{5}$$

wo P die Anfangsposition, Q die Endposition und $d\mathbf{s}$ ein Element des Pfades ist. Wenn nun der Pfad geschlossen ist, das heißt, dass man am Ende der Wanderung wieder zurück beim Anfang ist $(P = Q)$, dann gilt[1]

$$\Delta h = \oint \nabla h(x(t), y(t)) \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{6}$$

Dies gilt für beliebige geschlossene Pfade. Mit dem Stokes'schen Satz gilt also

$$\nabla \times \nabla h(x, y, 0) = 0 \tag{7}$$

Es gilt übrigens, ohne Beweis, dass für jedes Vektorfeld $\mathbf{a}(x, y, z)$ für das gilt $\nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = 0$, ein Skalarfeld $\phi(x, y, z)$ gefunden werden kann, so dass $\mathbf{a}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ gilt. Das heißt: jedes *rotations-freie* Vektorfeld kann als gradient eines Skalarfeldes ausgedrückt werden.

In der Flüssigkeitsdynamik wird ein wirbelfreies Strömungsfeld $\mathbf{v}(x, y, z)$ (für das $\nabla \times \mathbf{v}(x, y, z) = 0$ gilt) deshalb auch *Potenzialströmung* genannt.

In der Elektrostatik gilt $\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = 0$, und deshalb kann man das Feld $\mathbf{E}(x, y, z)$ ausdrücken als Gradient eines Potenzials $\phi(x, y, z)$:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \tag{8}$$

Das Vorzeichen ist nur eine Konvention.

3 Wirbelfelder

Ein Vektorfeld $\mathbf{b}(x, y, z)$ für das gilt, dass

$$\nabla \times \mathbf{b}(x, y, z) \neq 0 \tag{9}$$

kann man *nicht* als $\nabla\phi(x, y, z)$ schreiben. Wenn aber gilt, dass $\mathbf{b}(x, y, z)$ *quellenfrei* ist, $\nabla \cdot \mathbf{b}(x, y, z) = 0$ (siehe Abschnitt 4), dann kann man immer ein Vektorfeld $\mathbf{a}(x, y, z)$ finden so dass

$$\mathbf{b}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) \tag{10}$$

In der Magnetostatik heißt so ein Vektorfeld $\mathbf{a}(x, y, z)$ ein *Vektorpotenzial*. Die Tatsache, dass solch ein Vektorpotenzial nur gefunden werden kann, wenn $\mathbf{b}(x, y, z)$ quellenfrei ist, kommt daher, weil für beliebige $\mathbf{a}(x, y, z)$ gilt, dass

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = 0 \tag{11}$$

(siehe Übungen).

In der Flüssigkeitsmechanik kann man eine Strömung immer als Summe eines Potenzialströmungsfeldes und eines quellenfreies Wirbelfeldes sehen.

In der Magnetostatik kann man das Magnetfeld $\mathbf{B}(x, y, z)$ immer mit einem Vektorpotenzialfeld $\mathbf{A}(x, y, z)$ beschreiben, da $\mathbf{B}(x, y, z)$ quellenfrei ist (es gibt keine "magnetische Monopole" in der Natur).

[1] Der Künstler M. C. Escher ist übrigens einer ganz anderer Meinung zugetan, siehe `http://www.mcescher.nl/Gallery/recogn-bmp/LW435.jpg`.

4 Quellen

In der Physik werden Vektorfelder oft für die Beschreibung von Strömungsfeldern benutzt, sowohl für rotations-freie und für nicht rotations-freie Strömungen. Hier spielt das Konzept "Quelle" eine zentrale Rolle. Die Quelle $q(x, y, z)$ eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(x, y, z)$ ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y, z) = q(x, y, z) \tag{12}$$

Man kann dies folgendermaßen interpretieren. Das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z)$ beschreibt hier den Massenfluß einer Flüssigkeit:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \tag{13}$$

wo $\rho(x, y, z)$ die Dichte der Flüssigkeit ist (in CGS Einheiten ist dies Gram-pro-kubik-Zentimeter) und $\mathbf{v}(x, y, z)$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit (in CGS Einheiten ist dies Zentimeter-pro-Sekunde). Wenn das Strömungsfeld *stationär* (d.h. *unveränderlich*) ist, dann sagt die Quelle $q(x, y, z)$, wie viel Flüssigkeit pro Sekunde pro Kubikzentimeter *kreiert* wird[2]. Normalerweise gilt allerdings der *Massenerhaltungssatz*, also $q(x, y, z) = 0$. Aber wenn wir, zum Beispiel, verschiedene chemische Komponenten separat betrachten, und deshalb unterschiedliche Dichtenfunktionen $\rho_i(x, y, z)$ für die verschiedenen chemischen Komponenten haben, dann können chemische Reaktionen die eine Komponente in die andere umsetzen. Also gilt, dass $q_i(x, y, z) \neq 0$ sein kann (nur muss $\sum_i q_i(x, y, z) = 0$ gelten).

In der Elektrodynamik und in der newtonsche Gravitationstheorie haben Quellen eine andere Bedeutung. Dort sind Quellen die Ursprung einer Kraft. Für die Elektrostatik gilt (siehe oben) $\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z)$, wo $\mathbf{E}$ das elektrische Feld ist, und ϕ das elektrische Potenzial. Für die Newtonsche Gravitationstheorie gilt $\mathbf{f}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z)$, wo $\mathbf{f}$ die Kraft-pro-Masseneinheit ist auf einem Testteilchen, und ϕ das Gravitationspotenzial.

Wie wir schon aus dem vorigen Kapitel wissen, gilt für die Elektrostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z) \tag{15}$$

wo $\rho(x, y, z)$ die Ladungsdichte ist. Wenn wir $\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z)$ schreiben, dann gilt

$$\nabla \cdot \nabla\phi(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z) \tag{16}$$

Der $\nabla \cdot \nabla$-Operator wird auch oft als ∇^2 oder als Δ geschrieben, und heißt der *Laplace Operator*. Also

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z) \tag{17}$$

wo hier ρ die Ladungsdichte ist.

Für Gravitationstheorie gilt ähnlich:

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = 4\pi G\rho(x, y, z) \tag{18}$$

[2] In *veränderlichen* Strömungen gibt es allerdings auch noch eine Zeit-Ableitung. So wird der Massenerhaltungssatz:

$$\frac{\partial\rho_i(x, y, z)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z)) = q_i(x, y, z) \tag{14}$$

Wir haben dies schon im vorigen Kapitel gesehen. Ab jetzt werden wir uns allerdings wieder auf *un*veränderliche Systeme fokussieren.

wo hier ρ die Massendichte ist und G die Gravitationskonstante (in CGS-Einheiten gilt $G = 6.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3 g^{-1} s^{-2}}$, in SI-Einheiten gilt $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$).

Eine Gleichung der Art

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = q(x, y, z) \tag{19}$$

heißt eine *Poisson-Gleichung*. Eine Gleichung der Art

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \tag{20}$$

heißt eine *Laplace-Gleichung*. Diese Art Gleichungen spielen eine zentrale Rolle in viele Gebiete der Physik.