Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

Kapitel 2: Fourier-Reihen

1. **Allgemein zu einfachen Wellen**
   In der Zusammenfassung wurde eine einfache Welle als Cosinus und/oder Sinus betrachtet. Mit komplexen Zahlen wird alles einfacher: da gibt es für eine Welle nur $A_m e^{2\pi imx/L}$ (also keine Spaltung zwischen Cosinus und Sinus).
   (a) Wenn wir diese Welle nun um einen beliebigen Abstand Δx nach rechts verschieben möchten, wie müssen wir den Koeffizient A_m ändern, damit dies geschiet?
   (b) Wenn wir eine *komplexe* Fourierreihe machen von einer *reellen* Funktion $y(x)$ (also $y(x)$ ist reell, aber A_m darf komplex sein), wie müssen sich A_m und A_{-m} jeweils zu einander verhalten damit $y(x)$ tatsächlich reell ist?

2. **Allgemein zu Fourier-Reihen**
   (a) Gleichung 16 der Zusammenfassung ist:
   $$\int_0^L y(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(Lt/2\pi)\cos(nt)dt \qquad (1)$$
   Diese Ausnahme wurde in der Zusammenfassung allerdings nicht hergeleitet. Leiten Sie diese Gleichung her.
   (b) In Gleichung 20 der Zusammenfassung wird Gebrauch gemacht von folgender Identität:
   $$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt = 2\pi\delta_{mn} \qquad (2)$$
   Argumentieren Sie, warum dies stimmt, indem Sie z.B. das Integral aufspalten in einen von 0 bis π und einen zweiten von π bis 2π.
   (c) Das Integral wurde immer von 0 bis 2π genommen. Könnte es auch z.B. von $-\pi$ bis π genommen werden, und warum?

3. **Block-Funktion**
   Betrachten wir folgende periodische Funktion:
   $$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \sin(x) \geq 0 \\ -1 & \text{für} \quad \sin(x) < 0 \end{cases} \qquad (3)$$
   (a) Machen Sie eine Grafik von dieser Funktion.
   (b) Berechnen Sie, für die *reelle* Fourierreihe, die Koeffizienten A_0, A_n und B_n.
   (c) Berechnen Sie, für die *komplexe* Fourierreihe, die Koeffizienten A_n.