

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2012)

Cornelis Dullemond

Kapitel 5: Krummlinige Koordinatensysteme

1. Gegeben seien die folgenden Vektorfelder in cartesischen Koordinaten. Bitte geben Sie sie in der zylindrischen Tangentialbasis \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϕ und \mathbf{e}_z an:

$$(a) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y - 3 \mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$(b) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_y \quad (2)$$

2. Gegeben seien die folgenden Vektorfelder in cartesischen Koordinaten. Bitte geben Sie sie in der sphärischen Tangentialbasis \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ an:

$$(a) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$(b) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \quad (4)$$

3. Gegeben seien die folgenden Vektorfelder in sphärischen Koordinaten. Bitte geben Sie sie in der cartesischen Tangentialbasis \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z an:

$$(a) \quad \mathbf{v}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5)$$

$$(b) \quad \mathbf{v}(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \quad (6)$$

4. In sphärischen Koordinaten wird der Gradient eines Skalarfeldes laut dem Skript gegeben von:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (7)$$

Argumentieren Sie woher die Faktoren $1/r$ und $1/r \sin \theta$ in dem zweiten bzw. dritten Term kommen.

5. Ein Stern strahlt Licht in allen Richtungen gleichermaßen stark aus. Der Licht-Flussvektor $\mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ zeigt dementsprechend immer nach aussen. Da das Licht ausserhalb vom Stern weder absorbiert, noch irgendwie verstärkt wird, muss gelten, dass die Divergenz des Flusses Null ist, also $\nabla \cdot \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$. Zeigen Sie anhand der Formel für die Divergenz in sphärischen Koordinaten, dass damit gilt, dass $F_r \propto 1/r^2$.
6. Zwei Vorlesungen zurück haben wir mit Hilfe des Stokesschen Satzes hergeleitet, dass das Magnetfeld rundum ein Stromdraht proportional zu $1/r$ ist (wo r der zylindrische Radius ist). Leiten Sie diese Proportionalität nun her mit Hilfe der Formel für $\nabla \times \mathbf{B}$ in zylindrischen Koordinaten.

7. Ein Vektorfeld sei, in cartesischen Koordinaten, gegeben von

$$\mathbf{v}(x, y, z) = -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \quad (8)$$

In zylindrischen Koordinaten wird dasselbe Feld folgendermaßen geschrieben:

$$\mathbf{v}(r, \phi, z) = r \mathbf{e}_\phi \quad (9)$$

Zeigen Sie, dass wenn man $\nabla \times \mathbf{v}$ in cartesischen Koordinaten berechnet (also mit Gl. 8) dasselbe heraus kommt als wenn man es in zylindrischen Koordinaten berechnet (mit Gl. 9 und der Formelsammlung aus dem Skript).