Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

Kapitel 6: Vektorfelder II

1. **Rotation von einem Gradienten**
   Beweisen Sie, dass für ein beliebiges Skalarfeld $\phi(x, y, z)$ gilt, dass
   $$\nabla \times \nabla\phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

2. **Divergenz einer Rotation**
   Beweisen Sie, dass für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{a}(x, y, z)$ gilt, dass
   $$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

3. **Potenzial-Vektorfeld**
   Ein Feld $\mathbf{v}(x, y, z)$ sei gegeben durch
   $$\mathbf{v}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) \tag{3}$$
   wo $\phi(x, y, z)$ ein Skalarfeld ist. Beweisen Sie, dass
   $$\oint_C \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{4}$$
   wo C eine willkürliche geschlossene Kurve ist.

4. **Vektorpotenzial**
   Ein Feld $\mathbf{b}(x, y, z)$ sei gegeben durch
   $$\mathbf{b}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z) \tag{5}$$
   wo $\mathbf{a}(x, y, z)$ ein Vektorfeld ist. Beweisen Sie, dass
   $$\oint_{\partial V} \mathbf{b}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{6}$$
   wo ∂V eine beliebige geschlossene Oberfläche ist.

5. **Zusammenhang zwischen Gauß und Stokes**
   Für ein willkürliches Vektorfeld $\mathbf{a}(x, y, z)$ gilt, dass
   $$\int_{\partial V} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{7}$$
   wo ∂V eine beliebige geschlossene Oberfläche ist.

(a) Beweisen Sie dies mit dem Gaußschen Satz

(b) Beweisen Sie dies mit dem Stokesschen Satz

6. **Verschiebungsstrom**

In Kapitel 2 wurden die Maxwell-Gleichungen für Elektrostatik und Magnetostatik eingeführt:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho && (8)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (9)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= 0 && (10)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} && (11)
\end{aligned}$$

Diese sind allerdings für Zeit-abhängige Systeme unvollständig. In dieser Aufgabe werden wir an Hand eines Beispiels beweisen, dass Gleichung 11 einen weiteren Term haben muss, der “Verschiebungsstrom-Term” genannt wird. Man stelle sich eine Kugelschale ∂V mit Radius R vor. Durch die Schale strömt ein elektrischer Strom mit Stromdichte J nach innen. J ist überall auf der Schale gleich groß (doch zeigt immer nach innen). Die Ladung in dem Volumen V wird also mit der Zeit größer:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 4\pi R^2 J \tag{12}$$

wo $Q = \int_V \rho dV$.

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel Gleichung 11 nicht stimmen *kann*. Hinweis: Benutzen Sie, wass Sie in den vorigen Aufgaben gelernt haben.

(b) Berechnen Sie $\partial\mathbf{E}/\partial t$ auf die Schale. Hinweis: Wie üblich, benutzen Sie Symmetrie-Argumente.

(c) Zeigen Sie, dass wenn wir Gleichung 11 auf folgende Weise ergänzen:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{13}$$

dass dann die Gleichung für dieses Beispiel wieder konsistent ist.