Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

Kapitel 2: Fourier-Reihen

Warnung: Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als "Lehrbuch". In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

1 Einleitung: Was ist das Ziel?

Wir haben bei den Schwingungen gesehen, dass man komplizierte Schwing-Muster von gekoppelten Schwingkörper immer als Summe von einfachen Sinus- und Cosinus-Schwingungen schreiben kann. Diese einfachen Schwingungen haben jeweils ihre eigene Winkelfrequenz[1] ω. Auch bei den kontinuierlichen Wellengleichungen gibt es einfache Wellen-Lösungen. Jede Welle wird karakterisiert von seiner Wellenzahl k. Die *dispersionsrelation* besagt, welche Winkelfrequenz ω zu jedem k gehört. Jedes beliebige Wellenmuster kann man als Summe von einfachen Wellen sehen. Wir benutzen das in unserem Ohr: Die verschiedenen Töne sind solche einfache Wellen die unser Ohr identifiziert an Hand von der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$.

Schauen wir jetzt ein kompliziertes Wellenmuster an, wie es an einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ aussieht: $y(x, t_0)$. Wir setzen die Zeit still: wir betrachten also nur den momentanen Zustand der Funktion $y(x, t_0)$. Wir wissen, dass es aus eine Summe von einfachen Wellen besteht, aber die Frage ist: wie? Aus welchen Komponenten ist es aufgebaut und wie groß sind deren Amplituden? Dies ist das Thema dieses Kapitels.

2 Eine einfache Welle näher betrachtet

Betrachten wir eine Welle der Form:

$$y(x) = A\cos(kx) \tag{1}$$

Zunächst fragen wir uns: Was ist die Wellenlänge dieser Welle? Die Antwort kann man finden indem man untersucht, an welchen Stellen $\cos(kx)$ immer wieder den selben Wert und Ableitung hat. Wenn wir bei $x = 0$ anfangen, ist dies der Fall bei $kx = 2\pi$, 4π etc. Die Wellenlänge λ ist also $k\lambda = 2\pi$, also:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2}$$

Was ist der Unterschied der o.g. Welle mit folgender Welle:

$$y(x) = A\sin(kx) \tag{3}$$

[1] Winkelfrequenz ω und "normale" Frequenz ν hängen folgendermaßen von einander ab: $\omega = 2\pi\nu$.

Die Antwort ist: Dies ist nur eine Verschiebung von Gl. 1 um $\pi/2k$ nach rechts. Es ist also eigentlich dieselbe Welle, nur verschoben.

Die nächste Frage ist: wie können wir die Welle von Gl. 1 auch um einen beliebigen Abstand Δx verschieben? Das geht z.B. so:

$$y(x) = A\cos(kx - k\Delta x) \tag{4}$$

Und da $\sin(kx) = \cos(kx - \pi/2)$ finden wir tatsächlich für $\Delta x = \pi/2k$ Gleichung 3 wieder zurück.

Im allgemeinen gilt, dass man immer eine Verschiebung des Cosinus um Δx auch als Summe eines Cosinus und eines Sinus schreiben kann:

$$\cos(kx - k\Delta x) = a\cos(kx) + b\sin(kx) \tag{5}$$

wo $a = \cos(k\Delta x)$ und $b = \sin(k\Delta x)$ sind.

Um eine einfache Welle zu beschreiben brauchen wir also die Wellenlänge λ (oder äquivalent die Wellenzahl k), und *entweder* eine Amplitude und eine Phase, *oder* zwei Amplituden: eine für den Cosinus-Teil und eine für den Sinus-Teil.

3 Wellen als Bausteine für (fast) beliebige Funktionen

Betrachten wir eine Funktion $y(x)$ die periodisch ist mit Periode L. Das heißt, dass $y(x + L) = y(x)$ und $y'(x + L) = y'(x)$. Wir brauchen also nur einen begrenzten Bereicht zu betrachten, da der Rest identisch ist. Wir betrachten also nur den Bereich $0 \le x < L$.

Fragen wir uns nun, welche einfachen Wellen gibt es, die diese Periodizität haben? Also: Welche Bausteine haben wir zur Verfügung um beliebige Funktionen zusammenzubasteln? Die Antwort ist:

$$A\cos(2\pi mx/L) + B\sin(2\pi mx/L) \qquad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, 3, \cdots\infty \tag{6}$$

Also jede Welle mit Wellenlänge $\lambda = L/m$ wo m eine Ganzzahl ist.

Es stellt sich heraus (wir werden dies jedoch nicht beweisen), dass man jede endliche nicht-singuläre Funktion als Summe solcher Wellen schreiben kann:

$$y(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos(2\pi mx/L) + B_m \sin(2\pi mx/L)] \tag{7}$$

wo wir $m = 0$ als Sonderfall behandelt haben. Solch eine Reihe heißt eine *Fourierreihe.*

4 Wie findet man die einfachen Wellen zurück?

Die Frage ist nun, wenn eine beliebige Funktion $y(x)$ vorliegt, wie finden wir die Koeffizienten $\{A_0, A_1, A_2, \cdots A_\infty\}$ und $\{B_1, B_2, \cdots B_\infty\}$ so dass $y(x)$ in der Form von Gleichung 7 geschrieben werden kann? Auf den ersten Blick sieht dies wie eine schwierige, wenn nicht unmögliche Aufgabe aus.

Es stellt sicht allerdings heraus, dass wir Gebrauch machen können von einer besonderen Eigenschaft von Integralen von Produkten von Cosinus- und Sinus-Funktionen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt &= \pi\delta_{mn} \qquad \text{für} \quad m \neq 0 \quad \text{und/oder} \quad n \neq 0 && (8)\\
\int_0^{2\pi} \cos(0t)\cos(0t)dt &= 2\pi && (9)\\
\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt &= \pi\delta_{mn} \qquad \text{für} \quad m \neq 0 \quad \text{und/oder} \quad n \neq 0 && (10)\\
\int_0^{2\pi} \sin(0t)\sin(0t)dt &= 0 && (11)\\
\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt &= 0 \qquad \text{für beliebige} \quad m, n && (12)
\end{aligned}$$

wo δ_{mn} die *Kronecker Delta-Funktion* ist:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = n \\ 0 & \text{für} \quad m \neq n \end{cases} \tag{13}$$

Wir werden dies jetzt nicht beweisen, aber diese Eigenschaften können wir zu unseren Nutzen machen.

Wenn wir nun annehmen, dass $y(x)$ in der Form von Gl. 7 geschrieben werden kann, können wir die o.g. Eigenschaften der Integralen ausnutzen, um die Koeffizienten zu extrahieren (nehmen wir $n \neq 0$ im folgenden Beispiel):

$$\begin{aligned}
\int_0^L y(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx &= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(Lt/2\pi)\cos(nt)dt \\
&= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos(mt) + B_m\sin(mt)\right]\right\}\cos(nt)dt \\
&= \frac{L}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt \\
&= \frac{L}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m\delta_{mn} \\
&= \frac{L}{2}A_n
\end{aligned} \tag{14}$$

Ähnlich sieht es mit dem Sinus aus:

$$\begin{aligned}
\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx &= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(Lt/2\pi)\sin(nt)dt \\
&= \frac{L}{2}B_n
\end{aligned} \tag{15}$$

Mit anderen Worten: Gegeben sei eine beliebige Periodische nicht-singulare Funktion $y(x)$ mit Periode L. Wir können diese Funktion nun als Fourierreihe schreiben. Die

Amplituden A_m und B_m ($m = 0, 1, 2, \cdots, \infty$) der *Fourierkomponenten* können wir jeweils durch ein Fourierintegral berechnen (hier: für $m > 0$):

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L y(x)dx && (16)\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx && (17)\\
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx && (18)
\end{aligned}
$$

5 Jetzt mit komplexen Zahlen...

Nehmen wir jetzt an, dass die Funktion $y(x)$ komplex ist. Die Fourierreihe ist dann:

$$
y(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2\pi i m x/L} \tag{19}
$$

wo diesmal A_m auch komplexe Zahlen sind, und diesmal m auch negativ sein kann. Wenn wir diese Funktion mit $e^{-2\pi i n x/L}$ multiplizieren, und über x integrieren, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L y(x)e^{-2\pi i n x/L}dx &= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(Lt/2\pi)e^{-int}dt\\
&= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{imt}\right)e^{-int}dt\\
&= \frac{L}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt\\
&= \frac{L}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty} 2\pi A_m \delta_{mn}\\
&= LA_n
\end{aligned} \tag{20}
$$

Das heißt, dass die komplexen Amplituden A_n jeweils durch folgenden Fourierintegral berechnet werden kann:

$$
A_n = \frac{1}{L}\int_0^L y(x)e^{-2\pi i n x/L}dx \tag{21}
$$

Man sieht, dass es mit komplexen Zahlen viel einfacher ist, die Fourierkomponenten zu finden.