Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

Kapitel 5: Gaußscher Satz, Stokesscher Satz

Warnung: Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als "Lehrbuch". In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

1 Gaußscher Satz

In der Physik hat der Gaußscher Satz mit Strömungs-Vektorfeldern und mit elektrischen Feldern zu tun. Lass uns das Beispiel von einem Strömungsfeld nehmen, da dies anschaulicher ist. Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z)$ das eine Gasströmung darstellt, und die Gasdichte $\rho(x, y, z)$ die darstellt, wie viel Gramm Gas es an der Stelle (x, y, z) pro Volumeneinheit gibt. Wir haben schon im letzten Semester gesehen, dass die Divergenz von diesem Vektorfeld etwas aussagt darüber, ob das Gas sich ausdehnt oder zusammengedrückt wird. Wir werden dies nun ordentlich herleiten, mit Hilfe vom Gaußschen Satz.

Nehmen wir ein willkürliches Volumen V mit Oberfläche S. Die Oberfläche S ist eine Art geschlossene "Tüte", die so definiert ist, dass alles was innerhalb S ist zum Volumen V gehört, und alles was sich ausserhalb S befindet *nicht* zu V gehört. Wichtig ist, dass wir die Form und Position dieser Oberflächen während des Experiments unverändert halten. Die totale Menge Gas die sich in dem Volumen befindet ist nun:

$$M = \int_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

Die Frage, die wir uns jetzt stellen, ist "Wie verändert sich M mit der Zeit?", also wie groß ist dM/dt? Da Gas nicht einfach verschwindet oder plötzlich aus dem Nichts entsteht (Massenerhaltung), gilt, dass dM/dt nur positiv sein kann, wenn Gas unter dem Strich in das Volumen hinein fließt, und nur negativ sein kann, wenn Gas unter dem Strich aus dem Volumen hinaus fließt. Wir stellen uns also die Frage: "Wie viel Gas fliesst jede Sekunde netto aus dem Volumen hinaus?".

Um dies zu beantworten definieren wir zuerst mal an jeder Stelle (x, y, z) den Massenfluß-Vektor $\mathbf{F}(x, y, z)$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) \equiv \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \tag{2}$$

Um den netto Ausfluß zu berechnen sind wir vor allem daran interessiert, wie $\mathbf{F}(x, y, z)$ an der Oberfläche S ist. Genauer noch: Wir wollen die Komponente des Vektors $\mathbf{F}(x, y, z)$ berechnen, der senkrecht auf die Oberfläche S steht, da nur diese Komponente beschreibt, wie viel Material *durch* die Oberfläche fliesst (die anderen zwei Komponenten fliessen *entlang* der Oberfläche). Um dies zu berechnen definieren wir an jeder Stelle auf der Oberfläche S einen Normalvektor $\mathbf{n}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Länge des Vektors $\mathbf{n}$ ist immer 1.

- Der Vektor steht immer senkrecht auf der Oberfläche S.
- Der Vektor zeigt immer nach *außen*.

Die Menge Material die pro Oberflächeneinheit durch S nach außen fliest ist nun $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Wenn wir dies über die ganze Oberfläche integrieren, finden wir was wir brauchen:

$$\frac{dM}{dt} = -\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \tag{3}$$

Es ist intuitiv klar, dass wenn $dM/dt \neq 0$ sich auch die Gasdichte ändern muss. Mit Gleichung 1 kann man dies mathematisch ausdrucken:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(x,y,z)}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \tag{4}$$

Mit Gleichung 3 erhalten wir

$$\int_V \frac{\partial \rho(x,y,z)}{\partial t} \, dx \, dy \, dz = -\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \tag{5}$$

also: ein Volumenintegral ist gleich ein Oberflächenintegral. Dies ist die mathematische Darstellung des Massenerhaltungssatzes aus der Physik. Genauer gesagt: dies ist die *Integralform* des Massenerhaltungssatzes.

Es gibt diesen Satz auch in *Differenzialform*. Um diese Form herzuleiten brauchen wir ein bisschen Magie von Herrn Gauß. Er hat bewiesen, dass die folgende Identität gilt:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \tag{6}$$

Dies heisst der *Gaußsche Satz*. Wir werden dies nicht im allgemeinen beweisen, aber in den Übungen werden Sie dies für einen Beispiel beweisen. Mit diesem Satz können wir Gl. 5 schreiben als

$$\int_V \frac{\partial \rho(x,y,z)}{\partial t} \, dx \, dy \, dz = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \tag{7}$$

oder äquivalent:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho(x,y,z)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) \right] dx \, dy \, dz = 0 \tag{8}$$

Da diese Gleichung *für willkürliche Wahl von V* gilt, muss der Integrand null sein, also

$$\frac{\partial \rho(x,y,z)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = 0 \tag{9}$$

oder, wenn wir nun $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ einsetzen:

$$\frac{\partial \rho(x,y,z)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(x,y,z)\mathbf{v}(x,y,z)] = 0 \tag{10}$$

Dies ist die *Differenzialform* des Massenerhaltungssatzes.

2 Stokesscher Satz

Der Stokesscher Satz hat Anwendung z.B. in der Flüssigkeitsmechanik und in der Elektrostatik/Elektrodynamik. Es ist vielleicht noch "magischer" als der Gaußscher Satz. Es stellt eine Verbindung da zwischen der Rotation eines Vektorfeldes $\nabla \times \mathbf{v}(x, y, z)$ und das Integral entlang dem Rand einer *nicht-geschlossenen* Oberfläche S. Am einfachsten ist es, wenn wir direkt mit dem Satz anfangen, und danach versuchen, dies zu interpretieren.

Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{B}(x, y, z)$ in 3-D Raum. Jetzt nehmen wir eine Schleife L, zum Beispiel ein Haargummi, und positionieren es irgendwo im Raum. Das Gummi darf jede Beliebige Form in 3-D beschreiben, Hauptsache, es ist eine geschlossene Schleife. Jetzt wählen wir eine beliebige offene Oberfläche S der als Rand die Schleife L hat. Mathematisch wird dies auch oft symbolisch geschrieben als $\partial S = L$, wo ∂S den Rand der Oberfläche S bedeutet. Es ist klar, dass es unendlich viele Oberflächen S gibt mit $\partial S = L$.

Jetzt definieren wir auf S wieder Normalvektoren, ähnlich wie bei dem Gaußschen Satz. Hier gilt wieder, dass $|\mathbf{n}| = 1$ und, dass $\mathbf{n}$ senkrecht auf S steht. Nur gibt es, im Gegensatz zu der geschlossenen Oberfläche aus dem Gaußschen Satz, im Fall einer offenen Oberfläche keinen Unterschied zwischen "innen" und "aussen". Das heißt, dass wir hier wählen dürfen, in welcher der 2 Richtungen wir $\mathbf{n}$ zeigen lassen, Hauptsache, wir machen dies konsequent über die ganze Oberfläche.

Der *Stokesscher Satz* ist nun:

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{B}(x, y, z)] \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{B}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} \tag{11}$$

wo $\oint_{\partial S}$ das Integral entlang ∂S ist, und $\mathbf{s}$ der Einheits-Tangentvektor entlang ∂S ist. Siehe Vorlesung für genauere Beschreibung. Auch hier haben wir wieder die Wahl, in welcher Richtung wir entlang ∂S integrieren ("linksherum" oder "rechtsherum", obwohl "links" und "rechts" hier schwierig zu definieren sind). Für Konsistenz muss mann aber die Richtung immer laut der Rechterhandregel definieren (siehe Vorlesung), so, dass die Richtungswahl von $\mathbf{n}$ und die von $\mathbf{s}$ mit einander im Einklang sind.

Das magische ist, dass Gleichung 11 für beliebige offene Oberfläche S gilt. Und wenn wir $\partial S = L$ festlegen, so erhalten wir aus der rechten Seite von Gl. 11 eine Zahl, und für beliebige S mit $\partial S = L$ produziert die linke Seite dieselbe Zahl!

3 Anwendung auf PEP2

In PEP2 wird Elektrostatik und Magnetismus behandelt. Es geht um statische (also nicht-veränderliche) elektrische Felder $\mathbf{E}(x, y, z)$ und magnetische Felder $\mathbf{B}(x, y, z)$, und wie die von den Ladungsdichte $\rho(x, y, z)$ und der Stromdichte $\mathbf{J}(x, y, z)$ abhängen. Hinweis: Die Bedeutung von ρ ist hier eine ganz andere als in Abschnitt 1.

Die Gleichungen der Elektro/Magneto-Statik in Differenzialform sind:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{15}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit ist, und wo wir immer die Räumliche Abhängigkeit (x, y, z) implizit angenommen haben. Dies sind die statischen Versionen der *Maxwell Gleichungen*.

Mit dem Gaußschen Satz können wir Gleichung 12 in Integralform schreiben:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi Q \tag{16}$$

wo Q die totale Ladung innerhalb des Volumen V ist. Hier sieht man, dass der totale elektrische Fluß aus einem Volumen V gleich 4π mal die Ladung innerhalb von V ist. Mit dem Stokesschen Satz können wir Gleichung 15 auch in Integralform schreiben:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \tag{17}$$

Der Zweck dieser Integralform der Maxwell-Gleichungen wird in den Übungen weiter verdeutlicht.